



ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ

Վ.Ն.ՆԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ

ԳԻՏԱԿԱՆ ԱՇԽԱՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

ԵՐԿՈՒ ՀԱՏՈՐՈՎ

Վ.Վ.ՍՈՐՈՒԵՎԻ
ԽՆԲԱԳՐՈՒԹՅԱՄԲ

ՀԱՏՈՐ ԱՌԱՋԻՆ

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌԻ ԳԱ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ԵՐԵՎԱՆ 1960

АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

В.А.АМБАРЦУМЯН

НАУЧНЫЕ ТРУДЫ

В ДВУХ ТОМАХ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
В.В.СОБОЛЕВА

ТОМ ПЕРВЫЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО АН АРМЯНСКОЙ ССР
ЕРЕВАН 1960

*Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
АН Армянской ССР*

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

В связи с пятидесятилетием академика В. А. Амбарцумяна Издательство Академии наук Армянской ССР приняло решение об издании собрания его сочинений.

Это решение будет, несомненно, горячо одобрено самыми широкими научными кругами. В. А. Амбарцумян является одним из крупнейших ученых нашей страны, основателем советской теоретической астрофизики. Во многих областях астрономии им выполнены труды первостепенного значения. Однако до сих пор доступ к его работам был сильно затруднен, так как они печатались преимущественно в виде небольших статей в различных журналах. Издание собрания трудов В. А. Амбарцумяна облегчит их изучение и будет тем самым способствовать дальнейшему развитию астрофизики.

Основная заслуга В. А. Амбарцумяна состоит в создании ряда новых направлений теоретической астрофизики. Поэтому чтение его работ представляет собой ознакомление со многими важными этапами истории этой науки. Но труды В. А. Амбарцумяна составляют не только часть истории астрофизики — они актуальны и в настоящее время. Распространено мнение, что астрофизические работы быстро „стареют“ и развиваемые в них взгляды заменяются новыми. Однако далеко не всем работам по астрофизике уготовлена столь печальная участь. Собрание сочинений В. А. Амбарцумяна показывает, что при правильном подходе к астрофизическим проблемам значение выполненных работ с течением времени не только не уменьшается, но все более и более возрастает.

Характерной чертой научного творчества В. А. Амбарцумяна является сосредоточенная работа в течение нескольких лет над одной какой-либо проблемой без отвлечения внимания на другие вопросы. Когда проблема „проясняется“ и вырисовываются основы теории, В. А. Амбарцумян, оставляя доработку и развитие теории своим последователям, переходит к новой проблеме.

Таким образом, все работы В. А. Амбарцумяна совершенно естественно разделяются на циклы, расположенные почти в строгом хронологическом порядке. Указанное разделение работ В. А. Амбарцумяна на циклы принято и в настоящем собрании его сочинений.

Первые крупные работы В. А. Амбарцумяна посвящены физике газовых туманностей и звездных оболочек. В них заложены основы теории лучистого равновесия этих объектов и объяснены многие особенности их спектров. В дальнейшем В. А. Амбарцумян выполнил ряд работ по звездной астрономии, среди которых особенно большое значение имеют статьи по статистической механике звездных систем. Следующий цикл работ В. А. Амбарцумяна составляют его исследования по теории рассеяния света в мутных средах. Разработанные в них методы ныне широко применяются не только в этой теории, но и в других разделах математической физики. Очень важен цикл работ В. А. Амбарцумяна по изучению поглощения света в Галактике, основанный на выдвинутом им представлении о клочковатой структуре поглощающего слоя. Созданная им теория флюктуаций яркости Млечного Пути послужила отправным пунктом для многочисленных исследований других авторов в этой области. Указанные работы В. А. Амбарцумяна (вместе с некоторыми его работами по теоретической физике и математике) составили первый том собрания сочинений.

Работы, помещенные в первом томе, были выполнены В. А. Амбарцумяном главным образом во время его деятельности в Ленинградском университете. В дальнейшем характер его трудов сильно изменился: они стали гораздо более тесно связанными с результатами наблюдений. В этом, несомненно, сказался переезд В. А. Амбарцумяна в Армению, где он создал и возглавил Бюраканскую астрофизическую обсерваторию.

Первый цикл работ Бюраканского периода составляют труды по звездным ассоциациям. Так были названы В. А. Амбарцумяном открытые им и подробно изученные совместно с Б. Е. Маркаряном звездные системы особого типа. С очень большими основаниями можно предполагать, что звездные ассоциации являются группами сравнительно недавно возникших звезд. С указанным представлением связан цикл важных космогонических исследований В. А. Амбарцумяна. Изучение звезд, входящих в ассоциации, привело В. А. Амбарцумяна к еще одному выдающемуся открытию — установлению того, что излучение некоторых нестационарных звезд имеет частично нетепловую природу. В связи с этим им была высказана гипотеза о существовании новых типов источ-

ников звездной энергии. В последнее время В. А. Амбарцумян занимался (и продолжает заниматься) изучением галактик, распространяя на них результаты, полученные им ранее для других звездных систем. Перечисленные циклы работ В. А. Амбарцумяна включены во второй том собрания сочинений.

Настоящее собрание трудов В. А. Амбарцумяна не является полным. В него не вошли его ранние работы, статьи полемического характера и некоторые другие. Полный список научных трудов В. А. Амбарцумяна дан в конце второго тома.

Все статьи, вошедшие в собрание сочинений, печатаются в том виде, в каком они были опубликованы ранее в журналах. Исправлены лишь замеченные опечатки. Сделаны также небольшие изменения технического характера (библиографические указания даются всегда в конце статьи, опущены резюме на иностранных языках). К некоторым статьям сделаны примечания, в основном поясняющие текст. Первоначально предполагалось отразить в примечаниях работы других авторов, выполненные под влиянием трудов В. А. Амбарцумяна. Однако влияние его трудов на астрофизику столь огромно, что от этого намерения пришлось отказаться.

Статьи, опубликованные ранее на иностранных языках, переведены на русский язык. Переводы выполнили сотрудники Бюроканской астрофизической обсерватории М. А. Аракелян, Л. В. Мирзоян, Э. С. Парсамян, Г. М. Товмасын, Э. Е. Хачикян.

Подготовка собрания трудов В. А. Амбарцумяна к печати осуществлена Л. В. Мирзояном, который оказал мне также большую помощь в редактировании, за что выражаю ему искреннюю благодарность.

ФИЗИКА ГАЗОВЫХ ТУМАННОСТЕЙ
И ЗВЕЗДНЫХ ОБОЛОЧЕК

О ТЕМПЕРАТУРАХ ЯДЕР ПЛАНЕТАРНЫХ ТУМАННОСТЕЙ*

В настоящей статье предложен новый метод определения температур ядер планетарных туманностей, основанный на относительных интенсивностях линий H и He^+ .

Наш метод использует тот факт, что для каждой пары определенных квантовых состояний (n, m) отношение эйнштейновских коэффициентов вероятностей спонтанного перехода A'_{nm} для He^+ и A_{nm} для H постоянно и равно 16 (см. приложение 1)

$$\frac{A'_{nm}}{A_{nm}} = 16. \quad (1)$$

При определении температур ядер планетарных туманностей Занстра предположил, что все кванты, испущенные звездой и имеющие частоты больше, чем ν_0 (частота предела Лаймановской серии), поглощаются атомами водорода в туманности. Однако туманность содержит так много атомов He^+ , что мы можем предположить, что излучение за пределом серии He^+ ($4\nu_0$) поглощается атомами He^+ (мы пренебрегаем поглощением в линиях). Следовательно, только излучение с частотами между ν_0 и $4\nu_0$ поглощается водородом. Пусть число квантов с $\nu > 4\nu_0$ будет N'_{ul} и с $\nu_0 < \nu < 4\nu_0 = N_{ul}$. Согласно закону Планка:

$$\frac{N'_{ul}}{N_{ul}} = \frac{\int_{4x_0}^{\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx}{\int_{x_0}^{4x_0} \frac{x^2}{e^x - 1} dx}; \quad x_0 = \frac{h\nu_0}{kT}, \quad (2)$$

где T — поверхностная температура звезды, а h и k имеют свои обычные значения.

* On the Temperatures of the Nuclei of Planetary Nebulae. Цирк. Пул. обс., № 4, 1932.

В то же время N'_{ul} и N_{ul} суть числа ионизаций и рекомбинаций атомов He^+ и H в 1 секунду. Пусть далее:

$$p_1 N_{ul}, p_2 N_{ul}, p_3 N_{ul} \quad (3)$$

есть число рекомбинаций H в 1 секунду, при которых свободный электрон попадает непосредственно в 1-е, 2-е, 3-е квантовые состояния.

Пусть

$$p'_1 N_{ul}, p'_2 N_{ul}, p'_3 N_{ul}, \dots \quad (3')$$

суть соответствующие величины для He^+ .

Мы имеем:

$$\sum_i p_i = 1; \quad \sum_i p'_i = 1 \quad (4)$$

и, пренебрегая изменением p_i с изменением температуры (см. приложение II),

$$p_i = p'_i; \quad (i = 1, 2, 3, \dots). \quad (5)$$

Число S_{nm} атомных переходов типа $n \rightarrow m$ в 1 сек есть линейная однородная функция от $p_i N_{ul}$ [1] (наши S_{nm} имеют то же значение, что и величины $A_{nm} N_n$ Кэролла).

$$S_{nm} = \sum_i P_{nm} p_i N_{ul}; \quad S'_{nm} = \sum_i P'_{nm} p_i N'_{ul}. \quad (6)$$

Коэффициенты P^i_{nm} являются однородными функциями нулевой степени от эйнштейновского коэффициента A_{nm} (величины N_n Кэролла являются однородными функциями степени -1). Эта функция одинакова для H, He^+ и для какого-нибудь атома с подобным спектром. Из теоремы Эйлера и (1) мы заключаем:

$$P^i_{nm} = P^{i'}_{nm}. \quad (7)$$

Из уравнений (6) и (7) мы имеем:

$$\frac{S'_{nm}}{S_{nm}} = \frac{N'_{ul}}{N_{ul}}. \quad (8)$$

Применяя это уравнение к переходу $4 \rightarrow 2$, получим

$$\frac{S'_{42}}{S_{42}} = \frac{N'_{ul}}{N_{ul}}. \quad (8')$$

Согласно определению эйнштейновского коэффициента вероятности

$$S'_{42} = N'_4 A'_{42}; \quad S'_{43} = N'_4 A'_{43}, \quad (9)$$

где N'_4 есть число атомов He^+ в 4-м квантовом состоянии. Отсюда

$$S'_{42} = \frac{A_{42}}{A_{43}} S'_{43}. \quad (10)$$

Вставляя (10) в (8'), получаем

$$\frac{S'_{43}}{S'_{42}} = \frac{A_{43}}{A_{42}} \frac{N'_{ul}}{N_{ul}}. \quad (11)$$

При отсутствии поглощения отношение интенсивностей 4686 и H_β равно:

$$\frac{J'_{43}}{J_{42}} = \frac{S'_{43}}{S_{42}} \frac{h\nu'_{43}}{h\nu_{42}} = \frac{S'_{43}}{S_{42}} \frac{\lambda_{42}}{\lambda'_{43}}, \quad (12)$$

где λ — длина волны соответствующего излучения.

Из (11) и (12) мы находим

$$\frac{N'_{ul}}{N_{ul}} = \frac{A_{42}}{A_{43}} \frac{\lambda'_{43}}{\lambda_{42}} \frac{J_{43}}{J_{42}}. \quad (13)$$

Отношение $\frac{J'_{43}}{J_{42}}$ может быть получено из измерений интенсивностей 4686 и H_β . Следовательно, мы имеем величину $\frac{N'_{ul}}{N_{ul}}$ также из наблюдения. Следующая табл. 1 содержит величины $\frac{N'_{ul}}{N_{ul}}$ для различных значений T . Таблица вычислена согласно (2). Беря $\frac{N'_{ul}}{N_{ul}}$ из наблюдений, мы находим T из таблицы.

Таблица 1

x_0	T	N'_{ul}/N_{ul}
0.0	∞	∞
0.2	785.000°	9
0.3	523.000	4.5
0.6	262.000	1
1.0	157.000	0.3
1.5	105.000	0.075
2.0	78.500	0.024
2.5	62.800	0.005

Применения к планетарным туманностям NGC 7009 и 7027.

Во втором столбце табл. 2 отношение $\frac{4686}{H_\beta}$ дается для двух туманностей согласно наблюдениям Бермана [2].

Т а б л и ц а 2

Туманности	$\frac{4686}{H\beta}$	T
7009	2.18^m	115.000°
7027	1.03^m	165.000°

Проверка метода. Общий вид уравнения (13) есть:

$$\frac{N'_{ul}}{N_{ul}} = \frac{A_{nm}}{A'_{nk}} \frac{\lambda'_{nk}}{\lambda_{nm}} \frac{J'_{nk}}{J_{nm}}. \quad (14)$$

Применяя это уравнение к линиям: 4686 и $H\beta$, 4542 и $H\gamma$, 4200 и $H\epsilon$, получаем:

$$\frac{A_{42}}{A_{43}} \frac{\lambda'_{43}}{\lambda_{42}} \frac{J'_{43}}{J_{42}} = \frac{A_{92}}{A_{94}} \frac{\lambda'_{94}}{\lambda_{92}} \frac{J'_{94}}{J_{92}} = \frac{A_{11,2}}{A_{11,4}} \frac{\lambda'_{11,4}}{\lambda_{11,2}} \frac{J'_{11,4}}{J_{11,2}}.$$

Для рассматриваемых пар множители $\frac{A_{nm}}{A'_{nk}} \frac{\lambda'_{nk}}{\lambda_{nm}}$ приблизительно одинаковы. Следовательно:

$$\frac{J'_{43}}{J_{42}} = \frac{J'_{94}}{J_{92}} = \frac{J'_{11,4}}{J_{11,2}}.$$

Согласно Берману мы имеем соответственно следующие разности в яркостях для туманности NGC 7027:

$$1^m 03, \quad 0^m 86, \quad 0^m 87.$$

Отклонения от среднего значения $0^m 91$ сравнительно малы, и поэтому согласие теории с наблюдениями кажется вполне удовлетворительным.

Приложение I. Из уравнения Шредингера для атомов H и He^+ следует, что нормированные собственные функции φ'_n для He связаны с соответствующими собственными функциями φ_n для H посредством соотношения:

$$\varphi'_n(x, y, z) = \sqrt{8} \varphi_n(2x, 2y, 2z).$$

Матричные элементы q'_{nm} для атома He^+ равны:

$$q'_{nm} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'_n \overline{\varphi'_m} x dx dy dz = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(\xi, \eta, \zeta) \overline{\varphi'_m}(\xi, \eta, \zeta) \xi d\xi d\eta d\zeta = \frac{1}{2} q_{nm},$$

где q_{nm} соответствующие матричные элементы атома H .

Эйнштейновский коэффициент вероятности для атома H имеет вид:

$$A_{nm} = C\nu^3 |q_{nm}|^2$$

и для атома He^+ :

$$A'_{nm} = C\nu'^3 |q'_{nm}|^2.$$

Так как $\nu' = 4\nu$ и $q'_{nm} = \frac{1}{2} q_{nm}$, мы можем написать:

$$A'_{nm} = 16C\nu^3 |q_{nm}|^2 = 16 A_{nm}.$$

Приложение II. Применяя (1) к вероятностям перехода свободного электрона с энергией ε в данное дискретное квантовое состояние m , мы имеем:

$$A'_m(\varepsilon) = 16 A_m\left(\frac{\varepsilon}{4}\right).$$

Следовательно, отношение числа переходов свободных электронов в состояние m к числу всех рекомбинаций дается формулой:

$$p'_m(T) = \frac{p'_m N_{ul}}{N_{ul}} = \frac{\int A'_m(\varepsilon) e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon}{\sum_m \int A'_m(\varepsilon) e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon} = \frac{\int A_m\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon}{\sum_m \int A_m\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon},$$

если распределение скоростей находится в согласии с максвелловским законом.

Вставляя $\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon'$, мы находим

$$p'_m(T) = \frac{\int A_m(\varepsilon') e^{-\frac{4\varepsilon'}{kT}} \varepsilon' d\varepsilon'}{\sum_m \int A_m(\varepsilon') e^{-\frac{4\varepsilon'}{kT}} \varepsilon' d\varepsilon'} = p_m\left(\frac{T}{4}\right).$$

Пренебрегая изменением p_m с температурой, мы можем положить

$$p'_m = p_m.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. J. A. Carroll, MN., 90, 588, 1930.
2. Berman, L.O.B. 15, 86.

Примечание. Полученные методом, изложенным в настоящей статье, температуры ядер планетарных туманностей, строго говоря, являются *верхней* границей для действительных температур. Это связано с тем, что излучение ядра за границей Лаймановской серии водорода обычно не полностью поглощается теми туманностями, в спектрах которых линии *He II* интенсивны, а излучение за границей основной серии *He II* поглощается полностью.

С другой стороны, нам известно, что метод Занстра дает *нижнюю* границу для температур ядер планетарных туманностей. Таким образом, изложенный в настоящей статье метод в известной мере дополняет метод, предложенный Занстра.

Следует также иметь в виду, что различия в температурах, найденных методами Занстра и Амбарцумяна, могут быть вызваны непланковским распределением энергии в спектре звезды.

О ЛУЧИСТОМ РАВНОВЕСИИ ПЛАНЕТАРНОЙ ТУМАННОСТИ*

Прекрасными работами Хаббла, Боуэна и Занстра проблема происхождения свечения и спектров туманностей была решена, по крайней мере, качественно. Кэрролл и Силлие сделали попытку вычислить относительные интенсивности линий Бальмеровской серии водорода в спектрах туманностей, начиная, таким образом, наступление на важную проблему интерпретации современных спектрофотометрических данных. Однако динамика туманностей, так же как и природа и происхождение сил, в них действующих, остаются неясными. В настоящее время едва ли возможно ответить на эти вопросы и построить законченную теорию планетарных туманностей. Наблюдения контуров небулярных линий, а также точные наблюдения движения материи в туманностях позволят, несомненно, ускорить развитие теории в будущем.

Современное состояние проблемы позволяет, однако, решить одну ее часть, а именно задачу о силах, действующих в туманности. Действительно, мы увидим, что избирательное давление излучения, обусловленное специфическими условиями в туманностях, играет весьма важную роль в них. Может быть давление излучения в этом случае больше, чем любая другая сила. Поэтому вычисление давления излучения является вопросом, представляющим значительный интерес. Это вычисление может быть выполнено на основе анализа поля излучения. Этот анализ может быть произведен приближенно, без решения других задач, связанных с планетарными туманностями. Целью настоящей статьи является исследование лучистого равновесия планетарных туманностей. Мы сосредоточиваем наше внимание на планетарных туманностях, хотя многие результаты могут быть применены к диффузным туманностям, а также к газовым оболочкам, окружающим некоторые звезды с эмиссионными линиями в спектрах (Р Лебеда и др.).

Примененный здесь метод был предложен автором в более ранней статье [1]. Мы повторим часть этой предварительной работы, что-

* On the Radiative Equilibrium of a Planetary Nebula. Изв. Пулк. обс., **13**, № 114, 1, 1933.

бы сделать дальнейшее ее развитие доступным для читателей, знакомых с вышеуказанной статьей, и ввести некоторые модификации.

Часть I. Лучистое равновесие нерасширяющейся водородной туманности

Ниже мы рассмотрим планетарную туманность, состоящую только из водорода. Имеются некоторые наблюдательные данные, указывающие на расширение планетарных туманностей. Благодаря Доплеровскому смещению частоты спектральной линии различны в различных частях туманности. Это обстоятельство вводит значительное изменение в тип лучистого равновесия.

Но в некоторых случаях скорость расширения, несомненно, настолько мала, что различия в частотах линий между различными частями туманности меньше, чем Доплеровское расширение линии, обусловленное тепловым движением атомов. Поведение таких туманностей подобно поведению нерасширяющейся туманности, если мы ограничиваемся рассмотрением поля излучения и его взаимодействия с материей туманности. Во второй части мы рассмотрим лучистое равновесие расширяющейся планетарной туманности.

Согласно теории свечения туманностей, развитой Занстра, все или, по крайней мере, значительная часть квантов, испускаемых центральной звездой и имеющих частоты, превышающие ν_0 (частота границы серии Лаймана), поглощаются в туманности водородными атомами. Это обстоятельство требует, чтобы оптическая толща туманности τ_1 для этих частот была бы больше единицы или, по крайней мере, не во много раз меньше единицы.

Следуя ходу аргументации Занстра, мы здесь покажем, что для каждого поглощаемого кванта, имеющего частоту больше ν_0 , имеется определенная вероятность переизлучения p в той же частоте и вероятность $1-p$ переизлучения в линии L_α (первая линия серии Лаймана водорода). Ради простоты мы назовем излучение за границей серии Лаймана кратко „ультрафиолетовым излучением“, а соответствующие кванты — „ультрафиолетовыми квантами“.

Мы рассмотрим различные превращения ультрафиолетового кванта, испускаемого с поверхности центральной звезды. Он будет поглощаться небулярной оболочкой, а поглощение будет сопровождаться ионизацией одного атома водорода. После некоторого времени свободный электрон снова захватывается протоном. При этом захвате имеются две возможности: I. электрон попадает непосредственно на самый нижний уровень $1S$ (первый уровень) и II. электрон попадает

на один из возбужденных уровней. В первом случае излучается один новый ультрафиолетовый квант и восстанавливается первоначальное состояние. Во втором случае электрон совершает некоторую цепь переходов, последним звеном которой будет переход на первый уровень. Разрежение (диллюция) излучения настолько велико, а плотность вещества настолько низка, что разрыв этой цепи переходов весьма мало вероятен. Последний переход в нормальное состояние сопровождается излучением одного кванта серии Лаймана. Имеются снова две возможности: (а) Излучается один L_α -квант. Однако теория Занстра требует, чтобы оптическая толща туманности в ультрафиолете была, по крайней мере, порядка единицы. Но коэффициент поглощения в линиях серии Лаймана в несколько тысяч раз больше, чем за границей этой серии. Излученный L_α -квант поэтому будет поглощен атомом водорода, находящимся в нормальном состоянии. Этот атом перейдет на второй уровень и затем, благодаря отсутствию внешних возмущений в течение его короткой жизни, возвратится на первый уровень, испуская снова один L_α -квант. Таким образом, L_α -квант остается неизменным, и мы можем сказать, что он претерпевает только процессы рассеяния. Эти процессы могут повториться много раз, до тех пор, пока квант не достигнет внешней границы туманности и не вылетит. (б) Излучается один квант какой-нибудь другой линии серии Лаймана. Для простоты мы предположим, что это L_β -квант. В этой линии оптическая толща туманности также очень велика, и испущенный квант будет поглощен. Это поглощение сопровождается переходом атома с первого уровня на третий. На третьем уровне атом имеет две возможности: он либо совершает переход типа $3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$, излучая последовательно кванты H_α и L_α , либо он непосредственно переходит на первый уровень, излучая снова L_β . В первом случае конечным результатом является один L_α -квант. Его дальнейшая судьба описана выше. Во втором случае L_β -квант будет поглощен, и, таким образом, существует конечная вероятность возникновения L_α -кванта. После многочисленных поглощений и переизлучений вероятность выживания одного L_β -кванта будет очень мала, а вероятность возникновения одного L_α -кванта будет практически равна единице.

Таким образом, в обоих случаях (а) и (б) конечным результатом является L_α -квант. Легко видеть, что наше рассмотрение можно распространить на случаи, когда переходы сопровождаются вместо излучения одного L_β -кванта излучением одного L_γ , L_δ и прочих квантов. Пусть p является вероятностью случая I и $1-p$ — вероятностью случая II.

Таким образом, мы в самом деле видим, что после поглощения одного ультрафиолетового кванта имеется вероятность p переизлуче-

ния его с той же длиной волны* и вероятность $1-p$ излучения L_α -кванта. Мы не будем принимать во внимание промежуточные стадии, в которых поглощенный квант может появиться как L_β , L_γ и прочие кванты. Это окажет малое влияние на наши результаты. Кванты L_α не могут претерпевать новых превращений и могут только рассеиваться.

Проблема, таким образом, сводится к изучению двух наложенных полей излучения: поля ультрафиолетовых квантов и поля L_α -излучения в планетарных туманностях. Мы рассмотрим сперва поле ультрафиолетовых квантов.

Поле ультрафиолетовых квантов. В этой статье мы воспользуемся методом приведения сферической проблемы к плоской проблеме, развитым профессором Милном. Пусть k будет коэффициент поглощения ультрафиолетового излучения на атом. Этот коэффициент зависит от длины волны. Мы возьмем его среднее значение. Пусть, далее, n число H -атомов на первом уровне в 1 см^3 , r_1 и r_2 расстояния внутренней и внешней границ небулярного кольца от центральной звезды. Тогда оптическая глубина на расстоянии r от центральной звезды равна

$$\tau = \int_r^{r_2} nkdr. \quad (1.1)$$

Уравнения переноса энергии ультрафиолетовых квантов могут быть написаны согласно Милну в виде

$$\frac{1}{2} \frac{dI(\tau)}{d\tau} = I(\tau) - B(\tau), \quad (1.2)$$

$$\frac{1}{2} \frac{dI'(\tau)}{d\tau} = B(\tau) - I'(\tau), \quad (1.3)$$

если использовать приближение типа Шварцшильда-Шустера.

Здесь $I(\tau)$ средняя интенсивность диффузного ультрафиолетового излучения туманности, направленного наружу в точке τ , а $I'(\tau)$ — средняя интенсивность того же излучения в той же точке, направленного внутрь туманности. Величина $4\pi B(\tau) d\tau$ есть количество энергии ультрафиолетовых квантов, испускаемых в слое $d\tau$ за секунду. Тот

* Благодаря свободно-свободным переходам, так же как и неупругим столкновениям свободного электрона, длина волны переизлученного кванта может значительно отличаться от длины волны поглощенного кванта. Однако она всегда остается короче $\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0}$, где c — скорость света. Но в этой статье мы не делаем различия между ультрафиолетовыми квантами различных длин волн.

же слой поглощает диффузное ультрафиолетовое излучение из различных частей небулярного кольца. Поглощаемая энергия равна $2\pi [I(\tau) + I'(\tau)] d\tau$. Кроме этого, слой поглощает излучение центральной звезды. Пусть πS будет количество ультрафиолетовой энергии звезды, падающей на каждый квадратный сантиметр внутренней поверхности туманности. В точке τ это количество уменьшается до $\pi S e^{-(\tau_1 - \tau)}$, где

$$\tau_1 = \int_{r_1}^{r_2} n k dr \quad (1.4)$$

оптическая толщина туманности. Из этого количества наш слой поглощает

$$\pi S e^{-(\tau_1 - \tau)} d\tau.$$

Так как из поглощенных квантов только доля p переизлучается снова как ультрафиолетовые кванты, то уравнение лучистого равновесия может быть написано в виде:

$$p \left[I(\tau) + I'(\tau) + \frac{1}{2} S e^{-(\tau_1 - \tau)} \right] = 2B(\tau). \quad (1.5)$$

Вводя граничные условия [2]

$$I'(0) = 0, \quad I(\tau_1) = I'(\tau_1), \quad (1.6)$$

мы принимаем в расчет диффузное излучение, падающее на любую часть внутренней границы небулярной оболочки и достигающее из других частей внутренней границы.

Из уравнений (1.2) и (1.3) имеем:

$$\frac{1}{2} \frac{d(I + I')}{d\tau} = I - I', \quad (1.7)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d(I - I')}{d\tau} = I + I' - 2B. \quad (1.8)$$

Дифференцируя (1.7) и сравнивая с (1.8), получаем:

$$\frac{1}{4} \frac{d^2(I + I')}{d\tau^2} = I + I' - 2B. \quad (1.9)$$

Вводя (1.5) в (1.9), мы находим следующее уравнение для $I + I'$:

$$\frac{1}{4} \frac{d^2(I + I')}{d\tau^2} = (1 - p)(I + I') - \frac{p}{2} S e^{-(\tau_1 - \tau)}. \quad (1.10)$$

Общее решение этого уравнения есть

$$I + I' = Ae^{-\lambda\tau} + Be^{\lambda\tau} + \frac{2p}{3-4p} Se^{-(\tau_1-\tau)}, \quad (1.11)$$

где A и B являются постоянными интегрирования, а $\lambda = 2\sqrt{1-p}$.

Из (1.11) и (1.5) мы находим:

$$B(\tau) = \frac{p}{2} \left(Ae^{-\lambda\tau} + Be^{\lambda\tau} + \frac{3}{2(3-4p)} Se^{-(\tau_1-\tau)} \right). \quad (1.12)$$

Вводя (1.11) в (1.7), получаем:

$$I(\tau) - I'(\tau) = -\frac{\lambda}{2} Ae^{-\lambda\tau} + \frac{\lambda}{2} Be^{\lambda\tau} + \frac{p}{3-4p} Se^{-(\tau_1-\tau)}. \quad (1.13)$$

Складывая и вычитая (1.11) и (1.13), мы находим $I(\tau)$ и $I'(\tau)$.

$$I(\tau) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{2} \right) Ae^{-\lambda\tau} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\lambda}{2} \right) Be^{\lambda\tau} + \frac{3p}{2(3-4p)} Se^{-(\tau_1-\tau)}. \quad (1.14)$$

$$I'(\tau) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\lambda}{2} \right) Ae^{-\lambda\tau} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{2} \right) Be^{\lambda\tau} + \frac{p}{2(3-4p)} Se^{-(\tau_1-\tau)}. \quad (1.15)$$

Первое из условий (1.6), согласно (1.15), может быть написано в виде:

$$A \left(1 + \frac{\lambda}{2} \right) + B \left(1 - \frac{\lambda}{2} \right) + \frac{p}{3-4p} Se^{-\tau_1} = 0. \quad (1.16)$$

Второе из условий (1.6) даст:

$$\lambda Be^{\lambda\tau_1} + \frac{2pS}{3-4p} = \lambda Ae^{-\lambda\tau_1}. \quad (1.17)$$

Из уравнений (1.16) и (1.17) находим следующие выражения для коэффициентов A и B :

$$A = \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{2} \right) e^{\tau_1} - \frac{\lambda}{2} e^{\lambda\tau_1}}{\frac{\lambda}{2} \left[\left(1 - \frac{\lambda}{2} \right) e^{-\lambda\tau_1} + \left(1 + \frac{\lambda}{2} \right) e^{\lambda\tau_1} \right]} \frac{p}{3-4p} Se^{-\tau_1}, \quad (1.18)$$

$$B = \frac{\left(1 + \frac{\lambda}{2} \right) e^{\tau_1} + \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda\tau_1}}{\frac{\lambda}{2} \left[\left(1 - \frac{\lambda}{2} \right) e^{-\lambda\tau_1} + \left(1 + \frac{\lambda}{2} \right) e^{\lambda\tau_1} \right]} \frac{p}{3-4p} Se^{-\tau_1}. \quad (1.19)$$

Эти значения A и B , введенные в (1.12), (1.14) и (1.15), определяют поле ультрафиолетовых квантов.

Для результирующего потока диффузного ультрафиолетового излучения на внешней границе туманности мы получаем:

$$\pi F_u = \pi [I(0) - I'(0)] =$$

$$= \pi \left\{ 1 - \frac{2e^{\tau_1} - \lambda \operatorname{sh} \lambda \tau_1}{\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) e^{-\lambda \tau_1} + \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) e^{\lambda \tau_1}} \right\} \frac{p}{3 - 4p} S e^{-\tau_1}. \quad (1.20)$$

Для нахождения решения в численном виде необходимо знать p и τ_1 . Величина p должна быть вычислена из чистой физики. Силлие [3] вычислил относительные вероятности захвата электронов протонами на различные уровни водорода. Из его результатов мы вывели долю захваченных электронов, которые непосредственно переходят из свободного состояния на первый уровень, переизлучая ультрафиолетовые кванты. Эта доля есть наше p . Величина p зависит от температуры свободных электронов. Для различных температур мы имеем:

T	10.000°	20.000°	50.000
p	0,46	0,49	0,57

Подставляя $p = 0,5$, мы получаем следующее асимптотическое выражение для результирующего потока на внешней границе при больших значениях τ_1 ($\tau_1 > 3$):

$$\pi F_u = 0,7 \pi S e^{-\tau_1}.$$

Результирующий поток прямого ультрафиолетового излучения звезды будет просто $\pi S e^{-\tau_1}$, а весь результирующий поток равен $1,7 \pi S e^{-\tau_1}$.

При отсутствии поглощающей оболочки результирующий поток от звезды равен πS . Его $1 - 1,7e^{-\tau_1}$ доля превращается в другие формы излучения. Благодаря тому факту, что путем расщепления ультрафиолетового кванта непременно создается один L_α -квант, поток в линии L_α на внешней границе будет содержать $\frac{1 - 1,7e^{-\tau_1}}{h\nu_c} L_\alpha$ -квантов, где ν_c — средняя частота ультрафиолетовых квантов. Если τ_1 велико, благодаря малости экспоненциального множителя мы можем сказать, что поток L_α энергии на внешней границе туманности приблизительно равен $\frac{\nu_\alpha}{\nu_c} \pi S$. Здесь ν_α — частота линии L_α .

Поле L_α -излучения. Для исследования поля L_α -излучения мы введем коэффициент поглощения χ в линии L_α на один водородный

атом в нормальном состоянии. Оптическая глубина для этой линии определяется формулой

$$t = \int_r^{r_2} n \kappa dr. \quad (1.21)$$

Отношение $\frac{\kappa}{k} = \omega$ можно принять постоянным, если пренебречь изменением температуры в пределах туманности. В самом деле, κ является функцией только атомных постоянных и Допплеровской ширины линии. Эта ширина зависит от температуры. Когда $\frac{\kappa}{k} = \omega$ постоянно, отношение $\frac{t}{\tau}$ также постоянно и мы имеем:

$$\frac{t}{\tau} = \frac{\kappa}{k} = \omega. \quad (1.22)$$

Если температура туманности порядка 10^3 — 10^4 градусов, величина ω будет также порядка 10^3 — 10^4 . Так как мы предполагали, что оптическая толща τ_1 туманности в ультрафиолетовой области порядка единицы и больше, то оптическая толща в линии L_α

$$t_1 = \int_{r_1}^{r_2} n \kappa dr$$

будет порядка 10^3 — 10^4 или больше.

Уравнения переноса излучения в линии L_α имеют тот же вид, что (1.2) и (1.3). Пусть $K(t)$ будет средняя интенсивность диффузного L_α -излучения туманности, направленного наружу в точке t , а $K'(t)$ —средняя интенсивность того же излучения, в той же точке направленного внутрь туманности. В качестве уравнений переноса имеем:

$$\frac{1}{2} \frac{dK(t)}{dt} = K(t) - C(t), \quad (1.23)$$

$$\frac{1}{2} \frac{dK'(t)}{dt} = C(t) - K'(t), \quad (1.24)$$

где $4\pi C(t) dt$ — количество энергии, испускаемой слоем dt в линии L_α за 1 секунду.

Этот слой поглощает диффузное L_α -излучение из других частей туманности. Количество поглощаемого диффузного излучения есть $2\pi [K(t) + K'(t)] dt$. Число L_α -квантов, испускаемых центральной звездой, незначительно, так как число ультрафиолетовых квантов, превращаемых в L_α -кванты, в несколько тысяч раз больше.

Число ультрафиолетовых квантов, которые поглощаются в слое dt и превращаются в L_α -кванты, равно:

$$\frac{(1-p)[2\pi(I+I') + \pi S e^{-(\tau_1-\tau)}] d\tau}{h\nu_c}$$

Таким образом, энергия L_α -излучения, создаваемого в dt , согласно (1.5), есть:

$$\frac{(1-p)}{p} \frac{\nu_\alpha}{\nu_c} 4\pi B(\tau) d\tau = \frac{1-p}{p} \frac{\nu_\alpha}{\nu_c} 4\pi B(\tau) \frac{dt}{\omega},$$

так как энергия каждого L_α -кванта есть $h\nu_\alpha$. Следовательно, уравнение лучистого равновесия имеет вид:

$$4\pi C(t) dt = 2\pi [K(t) + K'(t)] dt + 4\pi \frac{1-p}{p} \frac{\nu_\alpha}{\nu_c} B(\tau) \frac{dt}{\omega}$$

или

$$C(t) = \frac{1}{2} [K(t) + K'(t)] + \frac{\nu_\alpha}{\nu_c} \frac{1-p}{p\omega} B(\tau). \quad (1.25)$$

Граничные условия следующие:

$$K'(0) = 0; \quad K'(t_1) = K(t_1). \quad (1.26)$$

Из уравнений (1.23) и (1.24) мы имеем:

$$\frac{1}{2} \frac{d(K+K')}{dt} = K - K', \quad (1.27)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d(K-K')}{dt} = K + K' - 2C(t). \quad (1.28)$$

Дифференцируя (1.27) и вводя (1.28), находим:

$$\frac{1}{4} \frac{d^2(K+K')}{dt^2} = K + K' - 2C(t) \quad (1.29)$$

или, согласно (1.25),

$$\frac{1}{4} \frac{d^2(K+K')}{dt^2} = -\frac{2\nu_\alpha}{\nu_c} \frac{1-p}{p\omega} B(\tau). \quad (1.30)$$

Написав $B(\tau)$ в виде

$$\begin{aligned} B(\tau) &= \frac{p}{2} (Ae^{-\lambda\tau} + Be^{\lambda\tau} + De^{-(\tau_1-\tau)}) = \\ &= \frac{p}{2} (Ae^{-\frac{\lambda}{\omega}t} + Be^{\frac{\lambda}{\omega}t} + De^{-\frac{t_1-t}{\omega}}), \end{aligned} \quad (1.31)$$

где

$$D = \frac{3}{2(3-4p)} S, \quad (1.32)$$

мы находим следующее решение уравнения (1.30):

$$K(t) + K'(t) = a + bt - \frac{4\nu_a}{\nu_c} \frac{1-p}{\lambda^2} \omega \left(Ae^{-\frac{\lambda}{\omega}t} + Be^{\frac{\lambda}{\omega}t} + D\lambda^2 e^{-\frac{t_1-t}{\omega}} \right),$$

где a и b — постоянные интегрирования.

Дифференцируя это выражение, на основании (1.27) находим:

$$K(t) - K'(t) = \frac{b}{2} - \frac{2\nu_a}{\nu_c} \frac{1-p}{\lambda} \left(-Ae^{-\frac{\lambda}{\omega}t} + Be^{\frac{\lambda}{\omega}t} + D\lambda e^{-\frac{t_1-t}{\omega}} \right).$$

По определению

$$\lambda = 2\sqrt{1-p}.$$

Поэтому

$$K(t) + K'(t) = a + bt - \frac{\nu_a}{\nu_c} \omega \left(Ae^{-\frac{\lambda}{\omega}t} + Be^{\frac{\lambda}{\omega}t} + D\lambda^2 e^{-\frac{t_1-t}{\omega}} \right), \quad (1.33)$$

$$K(t) - K'(t) = \frac{b}{2} - \frac{\nu_a}{\nu_c} \frac{\lambda}{2} \left(-Ae^{-\frac{\lambda}{\omega}t} + Be^{\frac{\lambda}{\omega}t} + D\lambda e^{-\frac{t_1-t}{\omega}} \right). \quad (1.34)$$

Из (1.33) и (1.34) мы имеем:

$$K(t) = \frac{a}{2} + \frac{b}{4} + \frac{b}{2}t - \frac{\nu_a}{2\nu_c} \omega \left[A \left(1 - \frac{\lambda}{2\omega} \right) e^{-\frac{\lambda}{\omega}t} + B \left(1 + \frac{\lambda}{2\omega} \right) e^{\frac{\lambda}{\omega}t} + D\lambda^2 \left(1 + \frac{1}{2\omega} \right) e^{-\frac{t_1-t}{\omega}} \right], \quad (1.35)$$

$$K'(t) = \frac{a}{2} - \frac{b}{4} + \frac{b}{2}t - \frac{\nu_a}{2\nu_c} \omega \left[A \left(1 + \frac{\lambda}{2\omega} \right) e^{-\frac{\lambda}{\omega}t} + B \left(1 - \frac{\lambda}{2\omega} \right) e^{\frac{\lambda}{\omega}t} + D\lambda^2 \left(1 - \frac{1}{2\omega} \right) e^{-\frac{t_1-t}{\omega}} \right]. \quad (1.36)$$

Первое из условий (1.26) приводится к

$$\frac{a}{2} - \frac{b}{4} - \frac{\nu_a}{2\nu_c} \omega \left[A \left(1 + \frac{\lambda}{2\omega} \right) + B \left(1 - \frac{\lambda}{2\omega} \right) + 4D(1-p) \left(1 - \frac{1}{2\omega} \right) e^{-\frac{t_1}{\omega}} \right] = 0, \quad (1.37)$$

а второе

$$b = \frac{\nu_\alpha}{\nu_c} \left[-\lambda A e^{-\lambda\tau_1} + \lambda B e^{\lambda\tau_1} + 4D(1-p) \right]. \quad (1.38)$$

Вводя (1.38) в (1.37), находим:

$$a = \frac{\nu_\alpha}{2\nu_c} \left[-\lambda A e^{-\lambda\tau_1} + \lambda B e^{\lambda\tau_1} + 4D(1-p) \right] + \frac{\nu_\alpha}{\nu_c} \omega \left[A \left(1 + \frac{\lambda}{2\omega} \right) + B \left(1 - \frac{\lambda}{2\omega} \right) + 4D(1-p) \left(1 - \frac{1}{2\omega} \right) e^{-\frac{t_1}{\omega}} \right]. \quad (1.39)$$

Уравнения (1.35) и (1.36) вместе с (1.38) и (1.39) определяют поле L_* -излучения.

Плотность излучения во внутренних слоях туманности. Выше мы через πS обозначили количество энергии ультрафиолетового излучения, падающего от звезды на каждый квадратный сантиметр внутренней поверхности туманности. При отсутствии переизлучения средняя интенсивность ультрафиолетового излучения в этой области будет равна $\frac{\pi S}{4\pi} = 0.25 S$. В случае, когда переизлучение принимается в расчет, средняя интенсивность ультрафиолетового излучения возрастает и становится равной $\frac{1}{4} S + \frac{1}{2} (I_1 + I_2)$. Согласно (1.11), (1.18) и (1.19),

$$I(\tau_1) + I'(\tau_1) = \frac{2p}{3-4p} S \left[1 - \frac{1}{\lambda} \frac{\lambda e^{-\tau_1} + \lambda \operatorname{ch} \lambda\tau_1 + 2\operatorname{sh} \lambda\tau_1}{2 \operatorname{ch} \lambda\tau_1 + \lambda \operatorname{sh} \lambda\tau_1} \right]. \quad (1.40)$$

Выражение, заключенное в скобки, изменяется между 0 и $1 - \frac{1}{\lambda}$, если τ_1 изменяется между 0 и ∞ . Поэтому мы имеем:

$$\frac{1}{4} S \leq \frac{1}{4} S + \frac{1}{2} (I_1 + I_2) \leq \frac{1}{4} S + \frac{2p \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right)}{3-4p} S.$$

Подставляя $p = \frac{1}{2}$, получаем:

$$\frac{1}{4} S \leq \frac{1}{4} S + \frac{1}{2} (I_1 + I_2) < 0,40 S.$$

Таким образом, средняя интенсивность ультрафиолетового излучения на внутренней границе туманности того же порядка величины, как при отсутствии небулярной оболочки, и должна удвоиться, если τ_1 очень велико.

Положение совершенно меняется, когда мы рассматриваем поле L_α -излучения. Благодаря большой оптической толщине туманности в линии L_α и тому факту, что все поглощаемые L_α -кванты переизлучаются в той же частоте, плотность L_α -излучения во внутренних слоях оболочки очень большая.

Чтобы оценить эту плотность, мы сделаем некоторые преобразования в (1.38) и (1.39). Сравнивая (1.38) с (1.17) и (1.32), мы находим:

$$b = \frac{2\nu_\alpha}{\nu_c} S \quad (1.41)$$

и, пренебрегая в (1.39) членами, не содержащими множителя ω ,

$$a = \frac{\nu_\alpha}{\nu_c} \omega [A + B + 4D(1-p)e^{-\tau_1}]. \quad (1.42)$$

Вводя величины A , B и D , получаем:

$$a = \frac{\nu_\alpha}{\nu_c} \omega \left[3(1-p)e^{-\tau_1} - \frac{1 + e^{-\tau_1} \operatorname{ch} \lambda \tau_1}{2 \operatorname{ch} \lambda \tau_1 + \lambda \operatorname{sh} \lambda \tau_1} \right] \frac{2p}{3-4p} S. \quad (1.43)$$

Для выражения в скобках в (1.33) мы имеем:

$$Ae^{-\lambda \tau_1} + Be^{\lambda \tau_1} + D\lambda^2 = \frac{S}{3-4p} \left[6(1-p) - \frac{2p}{\lambda} \frac{\lambda e^{-\tau_1} + \lambda \operatorname{ch} \lambda \tau_1 + 2 \operatorname{sh} \lambda \tau_1}{2 \operatorname{ch} \lambda \tau_1 + \lambda \operatorname{sh} \lambda \tau_1} \right]. \quad (1.44)$$

Это выражение изменяется в следующих пределах:

$$2S \leq Ae^{-\lambda \tau_1} + Be^{\lambda \tau_1} + D\lambda^2 < \frac{S}{3-4p} \left[6(1-p) - \frac{2p}{\lambda} \right]$$

или, если $p = 0,5$,

$$2S \leq Ae^{-\lambda \tau_1} + Be^{\lambda \tau_1} + D\lambda^2 \leq 2,29S$$

и в первом приближении

$$Ae^{-\lambda \tau_1} + Be^{\lambda \tau_1} + D\lambda^2 = 2,15S. \quad (1.45)$$

Для средней интенсивности L_α -излучения на внутренней границе мы получаем приближенно

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [K(t_1) + K'(t_1)] &= \frac{\nu_\alpha}{2\nu_c} \omega S f(\tau_1) + \frac{\nu_\alpha}{\nu_c} \omega S \tau_1 - \frac{\nu_\alpha}{\nu_c} 1,07 \omega S = \\ &= \frac{\nu_\alpha}{\nu_c} \omega S \left[\tau_1 + \frac{1}{2} f(\tau_1) - 1,07 \right], \end{aligned}$$

где

$$f(\tau_1) = \left[3(1-p)e^{-\tau_1} - \frac{1 + e^{-\tau_1} \operatorname{ch} \lambda \tau_1}{2 \operatorname{ch} \lambda \tau_1 + \lambda \operatorname{sh} \lambda \tau_1} \right].$$

Если $\tau \geq 2$, мы можем пренебречь $\frac{1}{2} f(\tau_1)$ и приближенно имеем:

$$\frac{1}{2} [K(t_1) + K'(t_1)] = \frac{\nu_a}{\nu_c} \omega S [\tau_1 - 1].$$

Мы можем принять $\omega = 10\,000$ [1]. Поэтому если $\tau_1 = 2$, то средняя плотность L_α -излучения на внутренней границе будет порядка $10\,000 S$, где πS снова энергия всего ультрафиолетового излучения, падающего на каждый квадратный сантиметр внутренней поверхности туманности от центральной звезды. Следовательно, плотность L_α -излучения в этом примере в $40\,000$ раз больше, чем плотность всего разреженного ультрафиолетового излучения ядра при отсутствии поглощающей оболочки на том же расстоянии. Грубая оценка показывает, что ультрафиолетовое излучение черного тела при температурах порядка $40\,000$ — $50\,000^\circ$ почти в $5 \cdot 10^4$ раза сильнее, чем то же излучение в пределах Доплеровской ширины линии L_α , соответствующей температуре небулярной материи. Таким образом, плотность L_α -излучения во внутренних слоях небулярной оболочки будет в

$$40\,000 \times 5 \cdot 10^4 = 2 \cdot 10^9$$

раза больше, чем плотность прямого L_α -излучения центральной звезды в пределах Доплеровской ширины линии.

Такая большая плотность L_α -излучения должна производить большое накопление атомов в состоянии $2P$. С другой стороны, будет иметь место также большое накопление водородных атомов в метастабильном состоянии $2S$. Может оказаться поэтому, что оптическая толщина туманности в линиях Бальмеровской серии не очень мала.

Давление излучения во внешних частях туманности. Большая часть ультрафиолетового излучения звезды превращается туманностью в L_α -кванты. Поэтому поток излучения, испускаемый туманностью, будет состоять, главным образом, из L_α -квантов. Для достаточно большого τ_1 каждый ультрафиолетовый квант дает начало одному L_α -кванту, а поток L_α -излучения от туманности будет порядка $\frac{\nu_a}{\nu_c} \pi S$. На внутренней поверхности туманности поток L_α -излучения

будет практически равен нулю, а поток ультрафиолетового излучения будет πS . Давление излучения в слое газа пропорционально коэффициенту поглощения. На внутренней поверхности туманности поток излучения состоит из ультрафиолетовых квантов, для которых коэффициент поглощения мал. Поэтому давление излучения не будет очень большим. На внешних частях туманности, наоборот, поток излучения состоит, главным образом, из L_α -квантов, а коэффициент по-

глощения почти в 10^4 раз больше, чем в случае ультрафиолетовых квантов, в то время как поток излучения того же порядка. Давление излучения или, более точно, градиент давления излучения будет здесь в 10^4 раз больше, чем на внутренней границе оболочки. Физически ясно, что для больших τ_1 результирующий поток L_α -излучения πF_α во внешнем слое оболочки будет определяться формулой

$$\pi F_\alpha = \left(\frac{r_*}{r_n} \right)^2 \frac{2\pi h\nu_\alpha}{c^2} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\nu^2 d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1},$$

где r_* и r_n соответственно радиус центральной звезды и радиус туманности. Средний импульс, получаемый водородным атомом в нормальном состоянии в секунду от L_α -квантов, будет

$$\frac{\pi F_\alpha}{c} = \left(\frac{r_*}{r_n} \right)^2 \frac{2\pi h\nu_\alpha}{c^3} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\nu^2 d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

Импульс, получаемый каждым водородным атомом от гравитационного поля центральной звезды в секунду, есть

$$g \left(\frac{r_*}{r_n} \right)^2 m,$$

где g —гравитационное ускорение на поверхности центральной звезды. Однако не только нормальные водородные атомы, но и протоны подвержены гравитационной силе. Поэтому отношение μ отталкивающей силы R к силе притяжения G дается формулой

$$\mu = \frac{R}{G} = \frac{\pi}{mg \left(1 + \frac{n^+}{n_1} \right)} \frac{2h\nu_\alpha}{c^3} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\nu^2 d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1},$$

где $\frac{n^+}{n_1}$ —отношение числа протонов в кубическом сантиметре к числу нормальных водородных атомов в том же объеме. Даже в случае, когда мы подставляем

$$\frac{n^+}{n} = 500,$$

что вероятно слишком высокая величина [4], мы получаем для $T = 40.000^\circ$

$$\mu = \frac{10^{10}}{g}.$$

Значение g для ядер планетарных туманностей будет значительно больше, чем для Солнца. Однако невероятно, чтобы оно могло достигнуть $10^{10} \text{ см.сек}^{-2}$. Следовательно, мы можем заключить, что когда оптическая толща туманности в ультрафиолетовой области не чрезвычайно мала, давление излучения будет преобладающим фактором во внешних частях туманности.

Часть II. Лучистое равновесие расширяющейся водородной туманности

В некоторых случаях скорость расширения туманности, несомненно, больше, чем скорости внутренних молекулярных движений, и хорошо устанавливается спектроскопическими наблюдениями, так же как и по прямым фотографиям (Крбовидная туманность, туманности, окружающие Новые). Поэтому заслуживает внимания рассмотрение лучистого равновесия в таких случаях.

До обращения к этой проблеме мы покажем, что водородная туманность не может быть в состоянии механического равновесия и иметь в то же время максимум яркости на ограниченном расстоянии от центральной звезды. Наше доказательство является новым аргументом в пользу мнения о том, что планетарные туманности находятся в состоянии постоянного движения.

Невозможность механического равновесия планетарной туманности. В первой части было показано, что из числа ультрафиолетовых квантов, поглощаемых в данном объеме, некоторая доля p переизлучается в тех же частотах, а остальная доля $1-p$ превращается в L_α -кванты. Превращения в противоположном направлении столь редки, что ими можно пренебречь. Следовательно, существует строгое монохроматическое лучистое равновесие в линии L_α при некоторых „источниках“ L_α -квантов, распределенных по туманности. „Сила“ этих „источников“ в данном объеме равна доле $1-p$, умноженной на число ультрафиолетовых квантов, поглощаемых в том же объеме. Распределение источников может быть определено из анализа поля ультрафиолетовых квантов. Этот анализ выполнен в первой части работы для случая, когда линейная толща туманности мала по сравнению с ее радиусом. Но для рассмотрения возможных конфигураций.

механического равновесия такое ограничение является неправильным. Поэтому мы обратимся к общему случаю.

Пусть ρ_u есть плотность всего ультрафиолетового излучения (диффузное + прямое). Ясно, что количество ультрафиолетовой энергии, поглощаемой в единице объема, есть

$$n_1 c k \rho_u,$$

где n_1 — число нормальных водородных атомов в этом объеме. Из этого количества доля

$$\frac{\nu_a}{\nu_c} (1 - p) n_1 c k \rho_u$$

будет перенесена в линию L_α .

Принимая сферическую симметрию туманности, мы можем количество L_α -энергии, генерируемой в пределах сферы радиуса r , написать в виде

$$4\pi f(t) = 4\pi \frac{\nu_a}{\nu_c} (1 - p) c k \int_0^r \rho_u r^2 dr, \quad (2.1)$$

где t — оптическая глубина на расстоянии r от центральной звезды. Так как правая часть (2.1) монотонно возрастающая функция от r , мы имеем $f'(t) < 0$, ибо t убывает с возрастанием r .

Поток L_α -энергии через 1 см^2 поверхности нашей сферы будет

$$H = \frac{f(t)}{r^2}. \quad (2.2)$$

Уравнение механического равновесия может быть написано в виде:

$$\frac{dp}{dr} = -g\rho + \frac{\nu H n}{c}. \quad (2.3)$$

Если пренебречь гравитационным действием самой туманности и рассмотреть только притяжение к ядру, мы будем иметь

$$g = \frac{fM}{r^2}.$$

Величины ρ и p могут быть написаны в виде:

$$\rho = (n^+ + n_1) m; \quad p = (2n^+ + n_1) kT, \quad (2.4)$$

так как полное число частиц в единице объема равно $2n^+ + n_1$. Известно, что в туманности n_1 мало по сравнению с n^+ . Поэтому:

$$\rho = n^+ m; \quad p = 2n^+ kT \quad (2.5)$$

и (2.3) приводит к

$$2kT \frac{dn^+}{dr} = -\frac{fMmn^+}{r^2} + \frac{\chi f(t) n_1}{cr^2}$$

или

$$f(t) = \frac{c}{\chi} \frac{r^2}{n_1} \left[2kT \frac{dn^+}{dr} + \frac{fMmn^+}{r^2} \right]. \quad (2.6)$$

Согласно формуле ионизации для разреженного излучения,

$$\frac{n^{+2}}{n} = \frac{C}{r^2}, \quad (2.7)$$

где C —постоянная, зависящая от температуры и радиуса центральной звезды туманности.

Вводя (2.7) в (2.6), мы находим:

$$f(t) = \frac{cC}{\chi} \cdot \frac{1}{n^{+2}} \left[2kT \frac{dn^+}{dr} + \frac{fMm}{r^2} n^+ \right],$$

или дифференцируя:

$$-f'(t) \chi n = \frac{cC}{\chi} \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{n^{+2}} \left[2kT \frac{dn^+}{dr} + \frac{fMm}{r^2} n^+ \right] \right\}.$$

Вводя снова (2.7), имеем:

$$-f'(t) \frac{r^2 n^{+2}}{C} \chi = \frac{cC}{\chi} \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{n^{+2}} \left[2kT \frac{dn^+}{dr} + \frac{fMm}{r^2} n^+ \right] \right\}.$$

Если

$$v = \frac{1}{n^+},$$

$$-f'(t) \frac{r^2}{v^2} = \frac{cC^2}{\chi^2} \frac{d}{dr} \left[-2kT \frac{dv}{dr} + \frac{fMm}{r^2} v \right] \quad (2.8)$$

или

$$2kT \frac{d^2v}{dr^2} = \frac{\chi^2}{cC^2} f'(t) \frac{r^2}{v^2} + \frac{fMm}{r^2} \frac{dv}{dr} - \frac{2fMmv}{r^3}.$$

Легко видеть, что n^+ не имеет максимума. В самом деле, необходимым условием для такого максимума является существование минимума v , и мы будем иметь:

$$\frac{dv}{dr} = 0.$$

Благодаря неравенству $f'(t) < 0$ и положительности числовых постоянных, мы находим

$$\frac{d^2v}{dr^2} < 0,$$

что несовместимо с необходимыми условиями минимума v . Отсюда вытекает, что равновесная конфигурация с максимумом n^+ на конечном расстоянии от ядра невозможна.

Однако число рекомбинаций в 1 см^3 пропорционально n^{+2} . Поэтому интенсивность водородного излучения (в линиях серии Бальмера) также пропорциональна n^{+2} . Мы показали, что n^{+2} не имеет максимума на конечном расстоянии в случае механического равновесия. Но максимум излучения на ограниченном расстоянии является наблюдательным фактом. Мы можем сделать вывод, что наблюдаемые планетарные туманности не могут быть в состоянии механического равновесия*.

Вышеприведенное доказательство является новым аргументом в пользу гипотезы о расширении планетарных туманностей и, возможно, сходного происхождения планетарных туманностей и газовых оболочек, окружающих Новые.

Поле ультрафиолетовых квантов. Различия в частотах, вызываемые эффектом Допплера, связанным с расширением туманности, весьма малы по сравнению с шириной ультрафиолетовой области. Ими можно пренебречь. Поэтому поле ультрафиолетовых квантов в этом случае будет таким же, как и в случае нерасширяющейся туманности. И мы воспользуемся решением для этого случая.

Поле L_α -квантов. Мы рассмотрим предельный случай, когда скорость расширения v значительно больше средней скорости молекулярных движений. Для наблюдателя, расположенного вне туманности на фиксированном расстоянии от ядра, частота линии L_α , испускаемой атомами, летящими прямо к наблюдателю, будет:

$$\nu_\alpha \left(1 - \frac{v}{c} \right),$$

а частота, испускаемая атомами, летящими в противоположном направлении, будет:

$$\nu_\alpha \left(1 + \frac{v}{c} \right).$$

Таким образом, грубо говоря, небулярная материя прозрачна для L_α -излучения, идущего сзади. Но каждый атом способен поглощать излучение соседних атомов. Тип лучистого равновесия почти

* При этом доказательстве автор считал возможным пренебречь влиянием электромагнитных полей. Поэтому правильнее установленную теорему формулировать следующим образом: при действии одних лишь сил притяжения, светового давления и газового давления равновесная планетарная туманность не может иметь максимум плотности на конечном расстоянии от центра. *Ред.*

тот же, что в случае оболочки, состоящей из плоско-параллельных слоев, когда свечение, идущее сзади, не принимается в расчет. Нам кажется, что наши результаты будут качественно правильны, если мы рассмотрим такую простую модель.

Вместо (1.26) мы имеем следующие граничные условия:

$$k'(0) = 0; \quad k(t_1) = 0. \quad (2.9)$$

Для интенсивности излучения имеем соответственно (1.35) и (1.36):

$$k(t) = \frac{a}{2} + \frac{b}{4} + \frac{b}{2}t - \frac{\nu_a}{2\nu_c} \omega \left[A \left(1 - \frac{\lambda}{2\omega} \right) e^{-\frac{\lambda}{\omega}t} + B \left(1 + \frac{\lambda}{2\omega} \right) e^{\frac{\lambda}{\omega}t} + D\lambda^2 \left(1 + \frac{1}{2\omega} \right) e^{-\frac{t_1-t}{\omega}} \right], \quad (2.10)$$

$$k'(t) = \frac{a}{2} - \frac{b}{4} + \frac{b}{2}t - \frac{\nu_a}{2\nu_c} \omega \left[A \left(1 + \frac{\lambda}{2\omega} \right) e^{-\frac{\lambda}{\omega}t} + B \left(1 - \frac{\lambda}{2\omega} \right) e^{\frac{\lambda}{\omega}t} + D\lambda^2 \left(1 - \frac{1}{2\omega} \right) e^{-\frac{t_1-t}{\omega}} \right]. \quad (2.11)$$

Сравнивая с (2.9), мы в этом случае находим:

$$\begin{aligned} \frac{a}{2} - \frac{b}{4} - \frac{\nu_a}{2\nu_c} \omega \left[A \left(1 + \frac{\lambda}{2\omega} \right) + B \left(1 - \frac{\lambda}{2\omega} \right) + D\lambda^2 \left(1 - \frac{1}{2\omega} \right) e^{-\frac{t_1}{\omega}} \right] &= 0, \\ \frac{a}{2} + \frac{b}{4} + \frac{b}{2}t_1 - \frac{\nu_a}{2\nu_c} \omega \left[A \left(1 - \frac{\lambda}{2\omega} \right) e^{-\lambda\tau_1} + B \left(1 + \frac{\lambda}{2\omega} \right) e^{\lambda\tau_1} + \right. \\ \left. + D\lambda^2 \left(1 + \frac{1}{2\omega} \right) \right] &= 0. \end{aligned}$$

Из этих уравнений получаем:

$$\begin{aligned} b(1+t_1) &= \frac{\nu_a}{\nu_c} \omega \left\{ A \left[\left(1 - \frac{\lambda}{2\omega} \right) e^{-\lambda\tau_1} - \left(1 + \frac{\lambda}{2\omega} \right) \right] + \right. \\ &+ B \left[\left(1 + \frac{\lambda}{2\omega} \right) e^{\lambda\tau_1} - \left(1 - \frac{\lambda}{2\omega} \right) \right] + D\lambda^2 \left[\left(1 + \frac{1}{2\omega} \right) - \left(1 - \frac{1}{2\omega} \right) e^{-\frac{t_1}{\omega}} \right] \left. \right\}. \end{aligned}$$

Так как $t_1 = \omega\tau_1$ очень велико по сравнению с единицей,

$$\begin{aligned} b &= \frac{\nu_a}{\nu_c\tau_1} \left\{ A \left[\left(1 - \frac{\lambda}{2\omega} \right) e^{-\lambda\tau_1} - \left(1 + \frac{\lambda}{2\omega} \right) \right] + B \left[\left(1 + \frac{\lambda}{2\omega} \right) e^{\lambda\tau_1} - \right. \right. \\ &\left. \left. - \left(1 - \frac{\lambda}{2\omega} \right) \right] + D\lambda^2 \left[\left(1 + \frac{1}{2\omega} \right) - \left(1 - \frac{1}{2\omega} \right) e^{-\frac{t_1}{\omega}} \right] \right\}. \quad (2.12) \end{aligned}$$

Для a мы имеем:

$$a = \frac{b}{2} + \frac{\nu_a}{\nu_c} \omega \left[A \left(1 + \frac{\lambda}{2\omega} \right) + B \left(1 - \frac{\lambda}{2\omega} \right) + D\lambda^2 \left(1 - \frac{1}{2\omega} \right) e^{-\frac{t_1}{\omega}} \right]$$

или, пренебрегая членами, не содержащими ω ,

$$a = \frac{\nu_a}{\nu_c} \omega \left[A + B + D\lambda^2 e^{-\frac{t_1}{\omega}} \right], \quad (2.13)$$

что тождественно с (1.42).

В том же приближении мы можем написать:

$$b = \frac{\nu_a}{\nu_c \tau_1} \{ B (e^{\lambda \tau_1} - 1) - A (1 - e^{-\lambda \tau_1}) + D\lambda^2 (1 - e^{-\tau_1}) \}. \quad (2.14)$$

Вводя в (1.34), находим:

$$\begin{aligned} k(t) - k'(t) &= \frac{\nu_a}{2\nu_c \tau_1} \{ B (e^{\lambda \tau_1} - 1) - A (1 - e^{-\lambda \tau_1}) + D\lambda^2 (1 - e^{-\tau_1}) \} - \\ &- \frac{\nu_a}{\nu_c} \frac{\lambda}{2} (B e^{\lambda t} - A e^{-\lambda t} + D\lambda e^{-(\tau_1 - t)}). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Теперь мы имеем все необходимое для вычисления давления излучения в туманности.

Давление излучения в туманности. Мы рассмотрим два предельных случая.

Случай I. Оптическая толщина туманности в ультрафиолетовом свете τ_1 очень мала.

В этом случае

$$\begin{aligned} \pi F_x &= \pi [k(t) - k'(t)] = \\ &= \frac{\nu_a}{\nu_c} \frac{\lambda^2}{4} \pi S \left(\frac{\tau_1}{2} - \tau \right) = \frac{\nu_a}{\nu_c} (1 - p) \pi S \left(\frac{\tau_1}{2} - \tau \right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Мы видим, что в этом случае средний импульс, получаемый каждым водородным атомом на внешней границе туманности, равен

$$\frac{x\pi F_x(0)}{c \left(1 + \frac{n^+}{n} \right)} = \frac{x \frac{\nu_a}{\nu_c} (1 - p) \pi S \tau_1}{2c \left(1 + \frac{n^+}{n} \right)} \quad (2.17)$$

и направлен наружу от центральной звезды.

На внутренней границе туманности средний импульс, получаемый от излучения, имеет ту же величину (возможно с другим $\frac{n^+}{n}$) и на-

правлен к центральной звезде. В середине туманности при $\tau = \frac{\tau_1}{2}$ результирующий поток исчезает. Согласно (1.27) мы здесь имеем максимум плотности L_α -излучения, в то время как в нерасширяющейся туманности максимум этой плотности был на внутренней границе.

Случай II. Пусть τ_1 будет очень велико. В этом случае мы можем приближенно написать:

$$k(t) - k'(t) = \frac{\nu_\alpha}{2\nu_c \tau_1} \{Be^{\lambda\tau_1} - A + D\lambda^2\} - \\ - \frac{\nu_\alpha}{\nu_c} \frac{\lambda}{2} \{Be^{\lambda\tau} - Ae^{-\lambda\tau} + D\lambda e^{-(\tau_1-\tau)}\}.$$

На внутренней границе туманности имеем:

$$k(t_1) - k'(t_1) = \frac{\nu_\alpha}{2\nu_c \tau_1} \{Be^{\lambda\tau_1} - A + D\lambda^2\} - \frac{\nu_\alpha}{\nu_c} \frac{\lambda}{2} \{Be^{\lambda\tau_1} - Ae^{-\lambda\tau_1} + D\lambda\}.$$

Благодаря присутствию множителя $\frac{1}{\tau_1}$ мы можем пренебречь первыми скобками и получаем:*

$$k(t_1) - k'(t_1) = -\frac{\nu_\alpha}{\nu_c} S.$$

Физически ясно, что сумма числовых значений выходящего потока на внешней границе и направленного к звезде потока на внутренней границе будет равна $\pi \frac{\nu_\alpha}{\nu_c} S$, так как все ультрафиолетовые кванты благодаря большой величине τ_1 превращаются в L_α -кванты. Мы можем сделать вывод, что выходящий поток на внешней границе практически равен нулю.

В этом случае влияние давления излучения во внешних слоях туманности очень мало. Но внутренние слои претерпевают очень большое торможение. Не входя в обсуждение деталей рассматриваемого вопроса, мы видим, что алгебраическая разница между результирующими потоками на внешней и внутренней границах туманности в обоих случаях порядка $\pi \frac{\nu_\alpha}{\nu_c} S$, так же как в случае нерасширяющейся туманности. Это обстоятельство будет вызывать диссипацию туманности, и если в скоростях расширения различных слоев туманности не имеется дисперсии, то такая дисперсия появится под действием давления излучения после некоторого промежутка времени.

* Принимая во внимание (1.17). *Ред.*

В настоящее время обычно принимается, что планетарные туманности формируются в результате некоторого рода катаклизмов, подобных вспышке Новой. На первый взгляд может показаться, что наш метод анализа для поля излучения дает возможность вычислить давление излучения для каждой стадии истории туманности и таким путем нарисовать всю картину развития туманности.

Такой вывод будет неправильным, так как для начальной стадии вспышки условия весьма отличны от условий в планетарных туманностях, и наша теория неприменима. С другой стороны, на этих начальных стадиях сила тяжести, так же как и давление излучения, имеют максимальные значения. Поэтому, хотя эта начальная стадия вероятно не очень продолжительная (возможно порядка нескольких дней), ее влияние на дальнейшую историю будет очень большим. Однако с момента, когда условия возбуждения становятся сходными с обычными условиями в планетарных туманностях, наш метод может применяться.

Часть III. Гелиевая туманность

В случае водорода, благодаря тому факту, что спектроскопические термы, соответствующие данному главному квантовому числу, совпадают, можно рассматривать только два поля излучения, играющих существенную роль. В случае более сложных атомов, когда спектроскопические термы с одинаковым главным квантовым числом, но с различными l (азимутальное квантовое число), не совпадают, положение дел более сложное и, одновременно, более интересное. Мы рассмотрим здесь туманность, состоящую из атомов He , так как He один из наиболее важных компонентов газовых туманностей.

Рассмотрим атом He . Под влиянием излучения с частотами, лежащими за границей главной серии паргелия ($1^1S - n^1P$), этот атом может ионизоваться. Атом He^+ , возникающий после такой ионизации, может рекомбинировать с одним из свободных электронов. Немедленно после рекомбинации атом может оказаться либо в состоянии, принадлежащем системе термов паргелия, либо на одном из уровней ортогелия. Так как дальнейшие переходы могут происходить только в данной системе уровней (интеркомбинации—запрещены), мы каждый из этих случаев рассмотрим отдельно.

Паргелий. Как в случае водорода, здесь имеются две возможности: I—электрон непосредственно падает на самый нижний уровень 1^1S и II—электрон попадает на один из возбужденных уровней. В первом случае испускается один ультрафиолетовый квант и восстанавливается первоначальное состояние. Во втором случае электрон совер-

шает снова цепь переходов, последним звеном которой будет переход на первый уровень $1S$. Такой переход „разрешается“ только с уровнем n^1P , где n главное квантовое число. Переходы с уровнем с другими азимутальными квантовыми числами являются „запрещенными“. И они в действительности будут сравнительно редкими. Например, атомы, находящиеся в состоянии 3^1D , будут переходить в состояния 2^1P или 3^1P , так как вероятности перехода в эти состояния во много тысяч раз больше вероятности непосредственного перехода в 1^1S . Единственное исключение составляет состояние 2^1S . В самом деле, единственным энергетически возможным спонтанным переходом из этого состояния является переход $2^1S \rightarrow 1^1S$. И электроны, которые захватываются на этот уровень, останутся в нем до тех пор, пока они не перейдут в состояние 1^1S . Другими словами, состояние 2^1S является метастабильным, и будет иметь место большое накопление атомов в нем, настолько большое, что число переходов $2^1S \rightarrow 1^1S$ будет сравнимо с числом других „разрешенных“ переходов.

Таким образом, атом может попасть в состояние 1^1S только из состояний n^1P или 2^1S . Мы рассмотрим, что произойдет в каждом случае.

а) В случае переходов $2^1S - 1^1S$ атом испускает два кванта* с частотами ν_1 и ν_2 , которые ограничены только условием

$$h(\nu_2 + \nu_1) = \varepsilon_2 - \varepsilon_1,$$

где ε_2 и ε_1 энергии атома в состояниях 2^1S и 1^1S соответственно. Непрерывный спектр, излучаемый таким образом, свободно пройдет через туманность и не может снова служить для возбуждения состояния 2^1S , так как соответствующая вероятность одновременного поглощения двух квантов очень мала.

б) В случае перехода типа $n^1P \rightarrow 1^1S$ будет испускаться один квант главной серии гелия. Но туманность имеет очень большую оптическую толщину в линиях этой серии. Этот квант, поэтому, будет поглощен немедленно после излучения. Рассмотрим дальнейшую судьбу этого кванта, например, в случае перехода $3^1P \rightarrow 1^1S$. Будучи поглощенным, соответствующий квант возбудит нормальный атом гелия в состояние 3^1P . Из состояния 3^1P разрешаются различные спонтанные переходы. Если происходит переход $3^1P \rightarrow 1^1S$, то восстанавливается прежнее состояние дел. Но в случае перехода $3^1P \rightarrow 2^1S$ соответствующий квант резкой серии, как и последующее излучение, сопровождают

* Переход $2^1S \rightarrow 1^1S$ не может сопровождаться излучением только одного кванта $h\nu = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$. Излучение двух квантов является необходимым условием такого перехода. Этим замечанием я обязан Л. Ландау.

мое переходом $2^1S \rightarrow 1^1S$, свободно пройдет через туманность. Наконец, в случае $3^1P \rightarrow 3^1S$ единственным возможным следующим шагом является переход $3^1S \rightarrow 2^1P$. После многих поглощений и излучений вероятность выживания кванта $3^1P \rightarrow 1^1S$ будет практически равна нулю. Имеется некоторая вероятность p расщепления этого кванта: на квант $3^1P \rightarrow 2^1S$ и кванты, соответствующие запрещенному переходу $2^1S \rightarrow 1^1S$. В противном случае имеются две возможности: 1) из состояния 2^1P атом переходит в состояние 2^1S и затем в состояние 1^1S , испуская, таким образом, излучение, для которого туманность прозрачна; 2) атом испускает квант главной серии $2^1P \rightarrow 1^1S$. Этот квант будет снова поглощен и теперь снова возникнут две возможности. После большого числа поглощений и излучений вероятность выживания кванта $2^1P \rightarrow 1^1S$ будет также очень мала.

Таким образом, почти все кванты главной серии паргелия исчезнут в туманности и поток излучения в линиях этой серии будет очень мал на обеих границах (внешней и внутренней) небулярной оболочки.

Мы можем сделать вывод, что давление излучения, производимое излучением в линиях паргелия, чрезвычайно мало по сравнению с давлением излучения, действующего в случае водородных атомов.

Ортогелий. Атомы, попадающие вследствие рекомбинации на один из уровней системы ортогелия, переходят окончательно в метастабильное состояние 2^3S . Благодаря высокой степени метастабильности, концентрация атомов в этом состоянии будет очень большой. Оптическая толщина туманности в линиях главной серии $2^3S \rightarrow n^3P$ может стать большой. Например: если метастабильность настолько строгая, что принцип Больцмана

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} e^{-\frac{h\nu_{12}}{kT}}$$

остается в силе [5] (здесь n_2 и n_1 числа атомов в состояниях 2^3S и 1^1S соответственно, а g_2 и g_1 — соответствующие веса), то оптическая толщина может быть порядка 50 для первых линий главной серии.

Роль линии L_α здесь играет линия $2^3S \rightarrow 2^3P$. В самом деле, каждый поглощаемый в этой линии квант будет испускаться в той же линии без изменения частоты. Роль линии L_β играет линия $2^3S \rightarrow 3^3P$. В самом деле, каждый квант $2^3S \rightarrow 3^3P$, поглощаясь, возбуждает состояние 3^3P . Для атома в этом состоянии имеется определенная вероятность p перехода в состояние 2^3S и вероятность $1-p$ перехода типа $3^3P \rightarrow 3^3S \rightarrow 2^3P \rightarrow 2^3S$ с излучением кванта $2^3S \rightarrow 2^3P$. Таким образом, после многих поглощений и переизлучений вероятность выжива-

ния кванта $2^3S - 3^3P$ будет мала, хотя не столь мала, как в случае линии L_β водорода, так как $t_1 = 50$ кажется верхним пределом оптической толщи туманности в первых линиях ортогелия и она может быть фактически в несколько раз меньше.

Мы сделаем некоторые вычисления, чтобы оценить результирующий поток излучения в этой линии как функцию соответствующей оптической толщи и относительных вероятностей переходов. Результат будет представлять некоторый интерес, так как линия $2^3S - 3^3P$, имеющая длину волны 3889А, хотя и блендируется со слабой линией Бальмеровской серии водорода, наблюдаема в спектрах туманностей.

Удобно предполагать, что ослабление соответствующего ультрафиолетового излучения нейтральными атомами гелия мало, то есть мы рассматриваем случай, когда оптическая толщина туманности для этого излучения мала.

Количество ультрафиолетовой энергии, поглощаемой в $d\tau$, будет равно

$$\pi S_u d\tau,$$

так как диффузное ультрафиолетовое излучение туманности, благодаря малой оптической толщине, мало по сравнению с πS_u . Количество энергии, „созданной“ в линии $2^3S - 3^3P$, будет:

$$\frac{\nu_0}{\nu_c} q \pi S_u d\tau,$$

где ν_0 — частота линии $2^3S - 3^3P$, а ν_c — средняя частота ультрафиолетового излучения, q — постоянный коэффициент, определяемый группой коэффициентов вероятности переходов для атомов *He*.

Вводя оптическую глубину в рассматриваемой линии $t = \omega\tau$, мы можем написать уравнение лучистого равновесия в виде:

$$C(t) = \frac{P}{2} [K(t) + K'(t)] + \frac{\nu_0}{\nu_c} q \frac{S_u}{4\omega}, \quad (3.1)$$

где $C(t)$, $K(t)$ и $K'(t)$ имеют тот же смысл, что раньше, но не для линии L_α , а для линии $2^3S - 3^3P$. Величина P определена выше.

Вводя

$$A = \frac{\nu_0}{\nu_c} q \frac{S_u}{4\omega}, \quad (3.2)$$

мы находим из уравнений переноса (1.23) и (1.24)

$$\frac{1}{4} \frac{d^2(K + K')}{dt^2} = (1 - P)(K + K') - 2A. \quad (3.3)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$K + K' = ae^{\lambda t} + be^{-\lambda t} - 4At^2, \quad (3.4)$$

где

$$\lambda = 2\sqrt{1-P}. \quad (3.5)$$

Благодаря соотношению

$$\frac{1}{2} \frac{d(K + K')}{dt} = K - K' \quad (3.6)$$

мы находим:

$$K - K' = \frac{a\lambda}{2} e^{\lambda t} - \frac{b\lambda}{2} e^{-\lambda t} - 4At. \quad (3.7)$$

Складывая и вычитая (3.4) и (3.7), получаем:

$$K = \frac{a}{2} \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) e^{\lambda t} + \frac{b}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) e^{-\lambda t} - 2At^2 - 2At, \quad (3.8)$$

$$K' = \frac{a}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) e^{\lambda t} + \frac{b}{2} \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) e^{-\lambda t} - 2At^2 + 2At. \quad (3.9)$$

Вводя граничные условия для случая нерасширяющейся туманности, мы находим следующие выражения для постоянных интегрирования:

$$a = A \frac{4t_1 \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)}{\lambda \left[\operatorname{ch} \lambda t_1 + \frac{\lambda}{2} \operatorname{sh} \lambda t_1\right]}, \quad (3.10)$$

$$b = -A \frac{4t_1 \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)}{\lambda \left[\operatorname{ch} \lambda t_1 - \frac{\lambda}{2} \operatorname{sh} \lambda t_1\right]}. \quad (3.11)$$

Для потока энергии в нашей линии мы получаем:

$$\pi F = \pi(K - K')_{t=0} = \frac{\pi a \lambda}{2} - \frac{\pi b \lambda}{2} = \frac{8\pi A t_1}{\operatorname{ch} \lambda t_1 + \frac{\lambda}{2} \operatorname{sh} \lambda t_1} \quad (3.12)$$

или

$$\pi F = \frac{2\pi\nu_0}{\nu_c} q S_u \tau_1 \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda t_1 + \frac{\lambda}{2} \operatorname{sh} \lambda t_1},$$

где τ_1 — оптическая толщина туманности в ультрафиолетовых частотах.

Для линий других серий (резкой и диффузной), для которых туманность совершенно прозрачна, мы будем иметь:

$$\pi F' = \frac{2\pi\nu'_0}{\nu_c} q' S_u \tau_1, \quad (3.13)$$

так как в этом случае $t_1 = 0$. Величины F' , ν' , q' имеют те же значения, что F , ν и q , однако относятся ко второй линии. Отношение

$$\frac{F}{F'} = \frac{\nu_0}{\nu'_0} \frac{q}{q'} \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda t_1 + \frac{\lambda}{2} \operatorname{sh} \lambda t_1} \quad (3.14)$$

результатирующих потоков в любой обычной линии и в линии $\lambda 3889$ зависит главным образом от λt_1 , так как $\nu_0 q$ будет того же порядка величины, что $\nu'_0 q'$.

Таким образом, из относительных интенсивностей $\lambda 3889$ и $\lambda 4026$ мы можем найти приближенную величину λt_1 . Величина λ должна быть получена из чистой физики, и мы можем определить приближенную величину t_1 .

В любом случае результирующий поток в линии $2^3S - 2^3P$ будет иметь значительную величину и импульс, получаемый атомами на уровне 2^3S , будет очень большим. Однако на каждый атом на уровне 2^3S приходится большое число атомов на уровне 1^1S . Поэтому среднее давление излучения, действующее на атомы гелия, будет мало по сравнению со средним давлением, испытываемым атомами водорода.

Таким образом, мы видим, что среди линий ортогелия, так же как и паргелия, нет ни одной линии, которая играет такую же важную роль (в смысле большой величины селективного давления излучения), как линия L_α водорода.

Такое различие между He и H должно было бы произвести разделение атомов этих элементов. Однако вспомним, что лишь малый процент атомов гелия находится в нейтральном состоянии. Значительно больше число атомов He^+ . Действие селективного давления излучения на эти ионы, конечно, более важно для теории планетарных туманностей.

Ионизованный гелий. Структура спектра He^+ подобна структуре спектра водорода. Поэтому для атомов He^+ вся картина процессов излучения будет существенно тождественной с картиной для водородных атомов. Правда, поток энергии в первой линии главной серии $He II$ будет в несколько сотен раз меньше, чем поток в линии L_α , так как атомы He^+ поглощают кванты с частотами в четыре раза больше частот квантов, поглощаемых водородными атомами, а в со-

ответствующей области спектра интенсивность излучения будет слабее, чем за пределом серии Лаймана. Однако малая величина потока излучения будет достаточно компенсироваться тем, что отношение $\frac{n^{++}}{n^+}$ для гелия будет мало по сравнению с отношением $\frac{n^+}{n}$ для атомов II. Благодаря этому импульс, получаемый каждым атомом He^+ , распределяется между меньшим числом свободных ядер (He^{++} — атомов), чем импульс, получаемый каждым водородным атомом.

Мы можем сделать вывод, что селективное давление излучения для гелия того же порядка величины, что и для водорода.

Весьма интересно, что для He^+ несомненно оптическая толща в соответствующей ультрафиолетовой области τ_1^+ велика по сравнению с единицей. В самом деле, согласно интерпретации Боуэна явления „слоистой эмиссии“, ультрафиолетовое излучение поглощается атомами He^+ во внутренних слоях наблюдаемой туманности. Поэтому, мы будем иметь $\tau_1^+ > 1$.

Интересно также, что τ_1^+ и оптическая толща туманности в области, соответствующей ионизации нейтральных атомов He , скажем τ_1 , связаны посредством простого соотношения.

Действительно, мы имеем:

$$d\tau = -kndr$$

для атомов He и

$$d\tau^+ = -k^+n^+dr$$

для атомов He^+ . Далее,

$$\frac{d\tau}{d\tau^+} = \frac{kn}{k^+n^+}. \quad (3.15)$$

Формула ионизации может быть написана в виде:

$$\frac{n^+}{n} = Ce^{-(\tau_1 - \tau)}, \quad (3.16)$$

если мы предположим, что электронная плотность и температура постоянны в туманности и кривизна слоев пренебрегается. Для $\tau = \tau_1$ мы имеем $\frac{n^+}{n} = C$. Мы получаем:

$$\frac{n^+}{n} = \left(\frac{n^+}{n}\right)_{\tau=\tau_1} e^{-(\tau_1 - \tau)}. \quad (3.17)$$

Сравнивая (3.15) с (3.17), мы находим:

$$\frac{d\tau}{d\tau^+} = \frac{k}{k^+} \left(\frac{n}{n^+}\right)_{\tau=\tau_1} e^{\tau_1 - \tau}.$$

Интегрирование этого уравнения дает:

$$e^{-\tau_1} [e^{\tau} - 1] = \frac{k}{k^+} \left(\frac{n}{n^+} \right)_{\tau=\tau_1} \tau^+. \quad (3.18)$$

Применим это уравнение к внутренней границе

$$\tau_1^+ = \frac{k^+}{k} \left(\frac{n^+}{n} \right)_{\tau=\tau_1} (1 - e^{-\tau_1}). \quad (3.19)$$

Мы приходим к выводу, что если наши предположения осуществляются, то существует верхний предел для оптической толщи туманности за пределом главной серии $He\ II$:

$$\tau_0^+ = \frac{k^+}{k} \left(\frac{n^+}{n} \right)_{\tau=\tau_1}. \quad (3.20)$$

Отношение $\frac{n^+}{n}$ при $\tau = \tau_1$, то есть на внутренней границе туманности, где ультрафиолетовое излучение звезды еще не ослаблено, может быть вычислено согласно обычной формуле ионизации для случая разреженного излучения.

Если мы берем пример, рассмотренный Занстра [4], мы получаем приблизительно

$$\frac{n^+}{n} = 30.$$

Если $k^+ = k$ (коэффициент поглощения для нейтрального гелия, к несчастью, неизвестен),

$$\tau_0^+ < 30.$$

Так как τ_1 будет порядка единицы или больше (как мы можем заключить из яркости He -изображений планетарных туманностей), то τ_0^+ будет фактически порядка 30 единиц.

Туманность, состоящая из водорода и гелия. Необходимо здесь заметить, что модель поля излучения в туманности, состоящей из атомов H и He одновременно, не может быть получена посредством простого наложения полей излучения для каждого рода атомов. В действительности имеет место взаимодействие между полями H и He .

Для кванта с частотой первой линии главной серии He^+ или паргелия имеется определенная вероятность поглощения водородными атомами. Результатом такого поглощения будет ионизация одного атома водорода. Энергия таким путем может переноситься из указанных линий в поле L_α . Правда, коэффициент поглощения для этих частот на

водородный атом в 10^5 раз меньше соответствующего коэффициента в случае He^+ или He -атомов соответственно, однако благодаря большой оптической толщине туманности в этих линиях, влияние рассматриваемых переходов будет заметным.

Противоположные переходы, как кажется, невозможны. Легко видеть, что влияние взаимодействия между полями излучения обоих родов атомов на строение поля L_α -квантов относительно мало и не может чувствительным образом изменить картину, представленную в I и II частях.

Заключение

Некоторые замечания о динамике планетарных туманностей. Существуют две возможные гипотезы о природе планетарных туманностей.

Мы можем предполагать, что распределение материи в туманности обладает стационарным характером и что материя, уходящая с границы туманности, компенсируется постоянным потоком от звезды*. Эта картина поддерживается тем фактом, что многие планетарные туманности имеют ядра со спектром Вольф-Райе. Такие спектры обычно объясняются непрерывным испусканием вещества из звезды со скоростями порядка 1000 км/сек . Материя, выброшенная таким образом из звезды, получает отрицательное ускорение, вызванное давлением излучения во внутренних слоях туманности, согласно нашей модели расширяющейся туманности. На больших расстояниях от звезды частицы получают положительное ускорение, и на расстоянии минимальной скорости мы будем иметь максимальную плотность.

Однако имеются многие туманности с ядрами типа абсорбционного O. Для таких туманностей более подходит другая гипотеза. Именно, мы предположим, что, благодаря некоторого рода катаклизму, определенная доля массы звезды выбрасывается из нее один раз с высокими скоростями порядка 1000 км/сек . Внешние слои такой оболочки будут диссипироваться в пространстве. Внутренние слои претерпевают большое отрицательное ускорение от давления излучения и теперь расширение туманностей происходит со сравнительно малыми скоростями (мы исключаем Крабовидную туманность). Эта гипотеза была обсуждена Занстра в последней статье, которую я получил при написании последнего параграфа настоящей работы. Однако Занстра пренебрег влиянием селективного давления излучения в линии L_α .

* Это предположение было выдвинуто проф. Милном в частном письме.

Мы видели, что роль этого давления будет очень велика и обсуждение динамики туманностей при учете селективного давления излучения представило бы некоторый интерес.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. V. Ambarzumian, MN, **93**, 50, 1932.
2. Milne, Z. f. Ap., **1**, 105, 1930.
3. Cillie, MN, **92**, 820, 1932.
4. Zanstra, Z. f. Ap., **2**, 337, 1931.
5. V. Ambarzumian, Цирк. Пулк. обс., № 6.

Примечание.—В настоящей работе впервые даны основы теории лучистого равновесия планетарных туманностей и выяснена большая роль светового давления в их динамике. Успех был достигнут благодаря введению метода разделения полей L_c - и L_a -излучения. В дальнейшем эта теория была развита в работах многих авторов. В результате было установлено, что при рассмотрении диффузии L_a -излучения необходимо принимать во внимание следующие два эффекта: 1) перераспределение излучения по частотам внутри линии, приводящее к уходу L_a -квантов из туманности в крыльях линии, 2) наличие градиента скорости в туманности, приводящее к уходу L_a -квантов из средних частей туманности вследствие эффекта Доплера. В работах, учитывающих указанные эффекты, получены гораздо более низкие значения для плотности L_a -излучения и для силы светового давления, вызванного этим излучением, чем в приведенной выше работе.

ТЕМПЕРАТУРЫ ЗВЕЗД ТИПА ВОЛЬФ-РАЙЕ*

В недавней работе Билс [1] опубликовал контур эмиссионной линии ионизованного гелия 4686 в спектре звезды Вольф-Райе *HD* 192163. Мы можем полагать, что механизм возбуждения эмиссионных линий в спектрах звезд Вольф-Райе тождественен с механизмом возбуждения линий в спектрах планетарных туманностей. На основании теории Занстра температуру звезды мы можем получить из отношения:

$$\frac{\text{полная интенсивность линии}}{\text{интенсивность 1A непрерывного спектра}}$$

Согласно контуру линии 4686, это отношение для рассматриваемой звезды приблизительно равно 200. Пренебрегая присутствием других линий ионизованного гелия, мы из табл. 7 работы Занстра [2] находим, как нижний предел, температуру $T = 65\,000^\circ$. Для многих звезд Вольф-Райе интенсивность линии 4686 гораздо больше и, следовательно, мы можем ожидать даже более высокие значения поверхностной температуры.

Пулково, Обсерватория,
Чухряевка, 7 апреля

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. MN, **92**, 196, 1932.
2. Publ. DAO. Victoria, **4**, 240, 1931.

Примечание. В этой заметке метод Занстра, приложенный им для случая планетарных туманностей, впервые применен к определению температур звезд типа Вольф-Райе. В дальнейшем этот метод стал применяться к определению температур звезд разных типов с яркими линиями в спектрах (звезды Вольф-Райе, Ве, Новые и др.)

* Temperatures of the Wolf-Rayet Stars. Nature, **129**, 725, 1932.

ВОЗБУЖДЕНИЕ МЕТАСТАБИЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ В ГАЗОВЫХ ТУМАННОСТЯХ*

Известно, что физические условия в газовых туманностях весьма благоприятны для накопления атомов в метастабильных состояниях.

Имеется два различных типа атомных процессов, которые ответственны за возбуждение метастабильных состояний в газовых туманностях: явление флюоресценции и электронные столкновения. Мы рассмотрим обе возможности:

Явление флюоресценции. Рассмотрим атом, имеющий три стационарных уровня 1, 2, 3 с энергиями $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3$. Пусть n_1, n_2, n_3 — числа атомов на соответствующих уровнях в кубическом сантиметре. Относительные величины этих чисел определяются в случае стационарного распределения полем излучения и атомными постоянными (вероятностями переходов). Условиями стационарности являются:

$$B_{12} \left(n_1 - \frac{g_1}{g_2} n_2 \right) \rho_{12} + B_{13} \left(n_1 - \frac{g_1}{g_3} n_3 \right) \rho_{13} - n_2 \frac{g_1}{g_2} B_{12} \sigma_{12} - n_3 \frac{g_1}{g_3} B_{13} \sigma_{13} = 0, \quad (1)$$

$$B_{13} \left(n_1 - \frac{g_1}{g_3} n_3 \right) \rho_{13} + B_{23} \left(n_2 - \frac{g_2}{g_3} n_3 \right) \rho_{23} - n_3 \left[\frac{g_1}{g_3} \sigma_{13} B_{13} + \frac{g_2}{g_3} \sigma_{23} B_{23} \right] = 0,$$

где B_{ik} — эйнштейновский коэффициент вероятности, соответствующий переходу $i \rightarrow k$, g_k — вес k -того уровня, ρ_{ik} — плотность излучения в частоте

$$\nu_{ik} = \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_i}{h}$$

* The Excitation of the Metastable States in the Gaseous Nebulae. Цирк. Пулк. обс., № 6, 10, 1933.

и

$$\sigma_{ik} = \frac{8\pi h\nu_{ik}^3}{c^3}; \quad (2)$$

h , c и π имеют свои обычные значения.

Произведение

$$A_{ki} = B_{ik}\sigma_{ik} \frac{g_i}{g_k} \quad (3)$$

есть эйнштейновский коэффициент вероятности спонтанного перехода $k \rightarrow i$.

Напишем уравнения (1) в виде:

$$B_{12}\rho_{12} + B_{13}\rho_{13} = \frac{g_1}{g_2} B_{12}(\sigma_{12} + \rho_{12}) \frac{n_2}{n_1} + \frac{g_1}{g_3} B_{13}(\sigma_{13} + \rho_{13}) \frac{n_3}{n_1}, \quad (4)$$

$$B_{13}\rho_{13} = -B_{23}\rho_{23} \frac{n_2}{n_1} + \left[\frac{g_1}{g_3} B_{13}(\sigma_{13} + \rho_{13}) + \frac{g_2}{g_3} B_{23}(\sigma_{23} + \rho_{23}) \right] \frac{n_3}{n_1}.$$

Перед тем как решить эти уравнения, произведем следующие упрощения в соответствии с физическими условиями в туманности. Плотность излучения ρ_{ik} может быть представлена в виде:

$$\rho_{ik} = W \frac{\sigma_{ik}}{e^{\frac{h\nu_{ik}}{kT}} - 1}. \quad (5)$$

Здесь T — поверхностная температура ядра, а множитель W определяется соотношением:

$$W = \frac{1}{4} \left(\frac{r_*}{r_n} \right)^2, \quad (6)$$

где r_* — радиус ядра и r_n — расстояние рассматриваемой точки туманности от ядра. Если W мало ($W < 10^{-3}$), в скобках уравнений (4) плотностями излучения ρ_{ik} по сравнению с σ_{ik} можно пренебречь и тогда имеем:

$$B_{12}\rho_{12} + B_{13}\rho_{13} = \frac{g_1}{g_2} B_{12}\sigma_{12} \frac{n_2}{n_1} + \frac{g_1}{g_3} B_{13}\sigma_{13} \frac{n_3}{n_1}, \quad (7)$$

$$B_{13}\rho_{13} = -B_{23}\rho_{23} \frac{n_2}{n_1} + \left(\frac{g_1}{g_3} B_{13}\sigma_{13} + \frac{g_2}{g_3} B_{23}\sigma_{23} \right) \frac{n_3}{n_1}.$$

Решая эти уравнения, получаем:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{B_{12}\rho_{12}(g_1 B_{13}\sigma_{13} + g_2 B_{23}\sigma_{23}) + g_2 B_{13} B_{23}\rho_{13}\sigma_{23}}{g_2 B_{12}\sigma_{12}(g_1 B_{13}\sigma_{13} + g_2 B_{23}\sigma_{23}) + g_1 B_{13} B_{23}\sigma_{13}\rho_{23}}. \quad (8)$$

Предположим, что второй уровень является метастабильным, т. е. что величина B_{12} мала по сравнению с величинами B_{13} и B_{23} . Следовательно, членами, содержащими $B_{12}\rho_{12}$, по сравнению с членами, содержащими $B_{13}\rho_{13}$, можно пренебречь. Формула (8) преобразуется в

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2 B_{13} B_{23} \rho_{13} \sigma_{23}}{g_2 B_{12} \sigma_{12} (g_1 B_{13} \sigma_{13} + g_2 B_{23} \sigma_{23}) + g_1 B_{13} B_{23} \sigma_{13} \rho_{23}} \quad (9)$$

Мы можем написать:

$$\rho_{ik} = W \sigma_{ik} \bar{\rho}_{ik}, \quad (10)$$

где

$$\bar{\rho}_{ik} = \frac{1}{e^{\frac{h\nu_{ik}}{kT}} - 1}$$

Тогда

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2 \bar{\rho}_{13} W}{\frac{g_1^2 B_{12} \sigma_{12}}{g_2 B_{23} \sigma_{23}} + g_1 \frac{B_{12} \sigma_{12}}{B_{13} \sigma_{13}} + g_1 \bar{\rho}_{23} W} \quad (11)$$

Ни переход $3 \rightarrow 1$, ни переход $3 \rightarrow 2$ не являются запрещенными. Следовательно, величины B_{13} и B_{23} будут одинакового порядка. Поэтому и отношения $\frac{B_{12}}{B_{13}}$ и $\frac{B_{12}}{B_{23}}$ будут малыми величинами одного порядка.

Рассмотрим теперь две возможности: $W \cong \frac{B_{12}}{B_{13}}, \frac{B_{12}}{B_{23}}$.

Случай I. $W < \frac{B_{12}}{B_{13}}, \frac{B_{12}}{B_{23}}$. В этом случае последним членом в знаменателе (11) можно пренебречь ($\bar{\rho}_{23}$ обычно порядка единицы) и мы имеем:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} W \frac{\bar{\rho}_{13}}{\frac{g_1 B_{12} \sigma_{12}}{g_2 B_{23} \sigma_{23}} + \frac{B_{12} \sigma_{12}}{B_{13} \sigma_{13}}}$$

Чтобы оценить порядок величины $\frac{n_2}{n_1}$, положим: $g_1 = g_2$; $B_{23} \sigma_{23} = B_{13} \sigma_{13}$. Тогда мы найдем:

$$\frac{n_2}{n_1} \cong W \frac{B_{13} \sigma_{13}}{2 B_{12} \sigma_{12}} \bar{\rho}_{13} \quad (12)$$

С другой стороны, если второй уровень не является метастабильным (обычный уровень) и B_{12} имеет тот же порядок величины, что и B_{13} и B_{23} , мы можем пренебречь последним членом в знаменателе уравнения (8) и написать:

$$\left(\frac{n_2}{n_1}\right)_{\text{обыч.}} = \frac{B_{12}\tau_{12}(g_1 B_{13}\tau_{13} + g_2 B_{23}\tau_{23}) W_{\rho_{12}}^- + g_2 B_{13} B_{23}\tau_{13}\tau_{23} W_{\rho_{13}}^-}{\frac{g_1}{g_2} B_{12}\tau_{12}(g_1 B_{13}\tau_{13} + g_2 B_{23}\tau_{23})}. \quad (13)$$

При оценке порядка величины мы можем положить: $g_1 = g_2$; $B_{12}\tau_{12} = B_{13}\tau_{13} = B_{23}\tau_{23}$. Тогда

$$\left(\frac{n_2}{n_1}\right)_{\text{обыч.}} = W_{\rho_{12}}^- + \frac{1}{2} W_{\rho_{13}}^-. \quad (14)$$

Главное различие между (12) и (14) заключается в присутствии в (12) большого по величине множителя $\frac{B_{13}\tau_{13}}{B_{12}\tau_{12}}$. Следовательно, мы можем утверждать, что в рассматриваемом случае число атомов в метастабильном состоянии в $\frac{B_{13}\tau_{13}}{B_{12}\tau_{12}}$ раз больше их числа в обычном возбужденном состоянии.

Случай II. $W > \frac{B_{12}}{B_{13}}, \frac{B_{12}}{B_{23}}$. В этом случае первыми двумя членами в знаменателе (11) можно пренебречь. Следовательно, мы имеем:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2 \rho_{13}^-}{g_1 \rho_{23}^-} = \frac{g_2}{g_1} \frac{e^{\frac{h\nu_{23}}{kT}} - 1}{e^{\frac{h\nu_{13}}{kT}} - 1}. \quad (15)$$

Если $h\nu_{13} > kT$, мы получаем:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} \left(e^{-\frac{h\nu_{12}}{kT}} - e^{-\frac{h\nu_{13}}{kT}} \right). \quad (16)$$

Если в то же время $h\nu_{23} > kT$ и $h\nu_{12} > kT$, то

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} e^{-\frac{h\nu_{12}}{kT}}. \quad (17)$$

В этом случае отношение $\frac{n_2}{n_1}$ приблизительно характеризуется за-

коном Больцмана. Этот результат был ранее получен Росселандом [1].

Физический смысл различия между двумя рассмотренными выше случаями заключается в следующем: первые два члена в знаменателе формулы (11) соответствуют запрещенным переходам из метастабильного состояния в нормальное. Последний член в знаменателе (11) соответствует переходам из метастабильного состояния в более высокие. Эти переходы индуцированы соответствующим излучением. В первом случае запрещенные переходы преобладают. Следовательно, запрещенная линия будет видна в полной силе. Во втором случае индуцированные переходы на более высокие уровни преобладают, и, если W достаточно велико, относительное число запрещенных переходов будет очень мало и запрещенная линия исчезнет. Короче говоря, во втором случае плотность излучения будет достаточно большой, чтобы сделать достаточно частыми столкновения метастабильных атомов со световыми квантами.

Могут возникнуть сомнения в возможности применения наших формул к газовым туманностям, потому что фотоионизация в этих туманностях играет гораздо более важную роль, чем возбуждение в линиях. Но мы можем рассматривать ионизованный атом как атом, находящийся на энергетическом уровне с очень большим весом g_3 , а непрерывный спектр за пределом главной серии атома—как очень широкую спектральную линию. Фактически, величина B_{13} , определенная из предположения, что $n_1 B_{13} \rho_{13}$ есть число атомов, ионизируемых в одну секунду, будет того же порядка величины, что и коэффициент B для первых линий главной серии. Мы только заметим, что благодаря большой оптической толщине туманности в обычных линиях главных серий излучение ядра в этих линиях будет поглощаться во внутренних слоях туманности и, следовательно, первый член формулы (14) исчезает, в то время как второй остается почти неизменным, поскольку оптическая толщина в непрерывном спектре примерно в 10^4 раз меньше, чем в обычных линиях главных серий. Таким образом, когда второй уровень не является метастабильным,

$$\left(\frac{n_2}{n_1} \right)_{\text{обыч.}} = \frac{1}{2} W_{\rho_{13}}^- \quad (18)$$

Наблюдения автора [2] представляются находящимися в хорошем согласии с этой формулой. Выражение (18) показывает, что наше утверждение, что в случае I число атомов в метастабильном состоянии в $\frac{B_{13}\sigma_{13}}{B_{12}\sigma_{12}}$ раз больше, чем в обычном возбужденном состоянии, должно удовлетворяться более точно, чем мы могли бы ожидать.

Применение к газовым туманностям. Мы имеем:

$$A_{ki} = \frac{g_i}{g_k} B_{ik} \sigma_{ik}.$$

Для первых линий каждой главной серии A_{ki} порядка 10^8 сек^{-1} , если соответствующий переход не является запрещенным. Считая для этих линий $g_i = g_k$, мы получим:

$$B_{ik} = \frac{10^8}{\sigma_{ik}}.$$

Как мы отмечали выше, величина B_{13} , соответствующая связанно-свободным переходам, будет этого порядка величины. В первом случае имеем:

$$W < \frac{B_{12}}{B_{13}} \text{ или } W < \frac{B_{12} \sigma_{13}}{10^8}.$$

Подставляя сюда $B_{12} = \frac{A_{21} g_2}{\sigma_{12} g_1}$, получаем:

$$W < \frac{A_{21}}{10^8} \frac{\sigma_{13}}{\sigma_{12}} \frac{g_2}{g_1} = 10^{-8} \frac{g_2}{g_1} \left(\frac{\nu_{13}}{\nu_{12}} \right)^3.$$

Величина $\frac{g_2}{g_1} \left(\frac{\nu_{13}}{\nu_{12}} \right)^3$ обычно порядка единицы и мы находим:

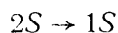
$$W < 10^{-8} A_{21}.$$

В планетарных и диффузных туманностях W порядка 10^{-14} . Следовательно,

$$\tau_2 = \frac{1}{A_{21}} < 10^6 \text{ сек},$$

где τ_2 — средняя продолжительность жизни в метастабильном состоянии.

Таким образом, если средняя продолжительность жизни в метастабильном состоянии меньше недели, удовлетворяются условия случая I. Только в случае, если средняя продолжительность жизни данного состояния больше, чем 10^6 сек , будут применимы формулы случая II. В качестве примеров мы рассмотрим следующие метастабильные уровни: состояния $2S$ водорода, $2S$ понизованного гелия, 2^1S паргелия и состояние 2^3S ортогелия. Первые три из этих состояний метастабильны, так как единственно возможный переход типа



является „запрещенным“, как переход из одного четного состояния в другое. Последнее состояние ортогогелия метастабильно, так как единственно возможный переход типа

$$2^2S \rightarrow 1^1S$$

является „запрещенным“ не только как переход из одного четного состояния в другое, а так же как интеркомбинация между уровнями ортогогелия и паргелия. Метастабильность уровня 2^3S гелия будет, следовательно, более высокого порядка, чем метастабильность первых трех уровней.

Если предположить, что средняя продолжительность жизни состояний первых трех типов является величиной порядка одной или десяти секунд, то есть того же порядка, что и средняя продолжительность жизни уровней, соответствующих излучению „небулия“, то будут применимы формулы случая I. Отношение $\frac{n_2}{n_1}$ для этих состояний будет в 10^8 или 10^9 раз больше, чем то же отношение для обычных линий*.

Только для уровня 2^3S гелия можно ожидать такой большой продолжительности жизни, чтобы имел место случай II. Тогда будет иметься очень большое относительное число атомов *He* в состоянии 2^3S и при благоприятных условиях оптическая толща туманности в главных сериях может быть значительной.

Прогресс наших знаний о средней продолжительности жизни различных метастабильных состояний существенно расширит возможности исследования возбуждения в газовых туманностях.

Применение к звездам Вольф-Райе. Для выяснения того, какой из двух наших случаев имеет место в газовой оболочке, окружающей звезду Вольф-Райе, необходимо знание W . Мы не имеем данных об этом, но представляется, что W едва ли меньше, чем 10^{-8} , а может быть и больше. Действительно, известно, что в течение месяца после вспышки Новой в ее спектре проявляются многие особенности спектра звезды Вольф-Райе. Принимая скорость расширения газовой оболочки в 1000 км/сек и радиус звезды после отделения газовой массы в 10^6 км , мы получим для W по истечении месяца величину в $0.5 \cdot 10^{-7}$. При таком значении W формула (16) будет применима к уровням со средней продолжительностью жизни, превышаю-

* Наблюдения показали, что число атомов в обычных возбужденных состояниях водорода является величиной порядка 10^4 на квадратный сантиметр диска туманности. Число водородных атомов в состоянии $2S$ будет, следовательно, 10^{12} или 10^{13} на квадратный сантиметр и оптическая толща в первых двух линиях бальмеровской серии может достигать 0,1 или 1.

щей 10^{-1} сек. Некоторые из метастабильных уровней будут иметь большие продолжительности жизни. Несомненно, это в первую очередь состояние 2^3S ортогелия. Накопление атомов в этом состоянии может обусловить значительную оптическую толщину в линиях главных серий ортогелия. Число атомов в состоянии 2^3S гелия на каждом квадратном сантиметре поверхности оболочки может быть оценено следующим образом.

Не все кванты, способные ионизовать нормальный атом гелия, излученные центральной звездой, поглощаются газовой оболочкой, так как в противном случае при температурах звезд Вольф-Райе линии He были бы гораздо сильнее, чем линии He^+ . Но мы предположим, что около одного процента упомянутых квантов будет поглощено, чтобы объяснить интенсивности линий гелия. Следовательно, оптическая толщина газовой оболочки для частот, превышающих частоту ионизации нормального атома гелия, будет около 0.01. Если коэффициент поглощения каждого атома гелия того же порядка, что и коэффициент поглощения за частотой предела водородной серии Лаймана, число нормальных атомов гелия на каждом квадратном сантиметре будет около $2 \cdot 10^{15}$. Применяя формулу (16), мы находим, что число атомов в состоянии 2^3S гелия на каждом квадратном сантиметре поверхности оболочки будет около 10^{14} . Такое число атомов должно обусловить значительную оптическую толщину оболочки в линиях главных серий ортогелия. Следовательно, должны наблюдаться фиолетовые абсорбционные компоненты соответствующих полос звезд Вольф-Райе.

Межзвездный кальций. Известно, что состояние 3^2D ионизованного кальция метастабильно, так как переход $3^2D \rightarrow 4^2S$ запрещен согласно правилу отбора азимутальных квантовых чисел. Но этот запрет является не столь сильным, как в рассмотренных выше случаях, так как в этом случае имеется конечная вероятность перехода, соответствующего квадрупольному излучению. Средняя продолжительность жизни состояния 3^2D будет вероятно порядка 10^{-3} сек. Фактор дилуции порядка $10^{-16} - 10^{-17}$ и в этом случае будет применима формула (12). Во всяком случае, мы будем иметь:

$$\frac{n_2}{n_1} < 10^{-11}$$

и, несмотря на метастабильность состояния 3^2D , число атомов, накапливающихся в этом состоянии, будет настолько мало, что излучение звезд не будет в заметной степени поглощаться этими атомами. Отсутствие инфракрасного дублета в спектрах B -звезд, содержащих

отдельные линии кальция, может быть новым доказательством межзвездной природы этих линий.

Возбуждение столкновениями. Мы рассмотрим теперь атом, имеющий только два уровня 1 и 2 с энергиями соответственно ϵ_1 и ϵ_2 . Предположим, что столкновения первого рода могут возбудить некоторые атомы туманности в метастабильные состояния. Атом может после этого перейти в нормальное состояние или спонтанным излучением кванта запрещенной линии, или передачей энергии возбуждения свободному электрону. Всеми другими видами переходов можно пренебречь. Если $b_{12}dt$ есть вероятность неупругого столкновения, возбуждающего нормальный атом, и $a_{21}dt$ — вероятность перехода возбужденного атома в нормальное состояние посредством сверхупругого столкновения, то условие стационарности будет иметь вид:

$$b_{12}n_1 - (A_{21} + a_{21})n_2 = 0. \quad (19)$$

Если распределение скоростей электронов подчиняется закону Максвелла, мы имеем:

$$b_{12} = \frac{g_1}{g_2} a_{21} e^{-\frac{h\nu_{12}}{kT}}$$

и (19) переходит в

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} \frac{a_{21}}{A_{21} + a_{21}} e^{-\frac{h\nu_{12}}{kT}}.$$

Если $A_{21} > a_{21}$, т. е. плотность электронов мала, отношение $\frac{n_2}{n_1}$ меньше, чем

$$\frac{g_2}{g_1} e^{-\frac{h\nu_{12}}{kT}}.$$

В этом случае спонтанные переходы преобладают и запрещенная линия видна в полную силу. Если же $A_{21} < a_{21}$, запрещенная линия слаба или не видна совсем.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Rosseland, Astrophysik.
2. В. А. Амбарцумян, Z. f. Ap., **6**, 107, 1933.

Примечания. 1. В параграфе настоящей статьи, относящемся к звездам Вольф-Райе, автором было предсказано существование в спектрах этих звезд абсорбционных компонент у линий нейтрального гелия с нижним уровнем 2^3S . Как известно, после этого Билс (Publ. Dom. Obs. Victoria, **6**, 93, 1934) обнаружил сильную абсорбционную компоненту у линии λ 3889 гелия $2^3S - 3^3P$ в спектре звезды Вольф-Райе HD 192163. Впоследствии соответствующее поглощение было обнаружено и у других звезд Вольф-Райе.

2. В настоящее время оценка оптической толщи туманности в бальмеровских линиях может быть сделана точнее, чем в приведенной статье. Как известно, из состояния $2S$ водорода возможны переходы в состояние $1S$ с излучением двух квантов. Эйнштейновский коэффициент спонтанного перехода в этом случае равен 8 сек^{-1} , а значит средняя продолжительность жизни атома в состоянии $2S$ равна $0,12 \text{ сек}$. Из-за столкновений она еще меньше. Поэтому оптическая толщина туманности в первых линиях бальмеровской серии меньше, чем указано в статье.

3. В книге В. А. Амбарцумяна „Теоретическая Астрофизика“ (1939) рассмотрен вопрос о возбуждении посредством столкновений двух метастабильных состояний атома и определено отношение интенсивности запрещенных линий, возникаемых из этих состояний. Полученные формулы применимы к иону OIII, дающему запрещенные линии $N_1 + N_2$ и λ 4363 в спектрах туманностей. Из сравнения теоретических и наблюдаемых значений интенсивностей этих линий определяются электронные температуры туманностей. Этот способ определения электронных температур туманностей широко используется в настоящее время.

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЯРКОСТИ МОНОХРОМАТИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ГАЗОВЫХ ТУМАННОСТЕЙ*

(Поступило 22 октября 1932)

Измерены абсолютные поверхностные яркости монохроматических изображений некоторых газовых туманностей. Эти поверхностные яркости позволяют определить количество возбужденных атомов на квадратный сантиметр диска туманности.

Известно, что поверхностная яркость объекта при отсутствии межзвездного поглощения не зависит от расстояния между наблюдателем и объектом. В этом случае поверхностная яркость зависит только от одной величины, а именно, от количества энергии, излучаемой 1 см^2 диска в одну секунду в единице телесного угла.

Настоящая работа представляет собой попытку определения поверхностных яркостей отдельных монохроматических изображений некоторых газовых туманностей. В качестве конечного результата получают значения количеств энергии E_λ , излучаемых в заданной спектральной линии одним квадратным сантиметром диска туманности в одну секунду в единице телесного угла.

Многочисленные факты делают вероятным предположение, что газовые туманности прозрачны для излучения в спектральных линиях, возникающих при переходах между двумя возбужденными состояниями (но не при переходе между возбужденным состоянием и основным). При таких обстоятельствах возможно по данной энергии E_λ , излучаемой одним квадратным сантиметром диска туманности в единице телесного угла в одну секунду, определить число световых квантов, излучаемых атомами, находящимися в цилиндре, ось которого совпадает с лучом зрения, с поперечным сечением в 1 см^2 . Последняя величина является важной физической характеристикой, которая тесно связана с условиями возбуждения в газовых туманностях. Теоретические выводы из результатов этой работы появятся

* Die Flächenhelligkeiten der monochromatischen Bilder einiger Gasnebel. Z. f. Ap., 6, 107, 1933.

позже в Пулковских сообщениях. Здесь мы ограничимся только несколькими замечаниями.

Описание метода. Наши наблюдения произведены с однопризменным спектрографом метрового рефлектора Симеизской обсерватории. Была использована короткофокусная камера с $F = 340$ мм. Щель спектрографа была раскрыта настолько широко (от 0.5 до 0.7 мм), что постоянно покрывалась заметная доля диска туманности.

На той же самой пластинке одновременно со спектром туманности фотографировался спектр звезды сравнения. В качестве звезды сравнения всегда выбирался карлик типа G0. Для получения спектра звезды также использовалась широкая щель, и все изображение звезды помещалось внутри щели. Гидрирование было особенно тщательным, чтобы получить равномерное почернение спектра звезды. Продолжительности экспозиций для туманности и соответствующей звезды сравнения были одинаковыми. Для исключения поглощения земной атмосферы оба объекта фотографировались примерно на одинаковых зенитных расстояниях.

Кроме того, на другой части каждой пластинки получался с различной шириной щели ряд снимков искусственного источника света с непрерывным спектром. Эти снимки использовались как шкала для фотометрической калибровки пластинок в каждой длине волны.

Все снимки обработаны на микрофотометре Коха Симеизской обсерватории; с помощью упомянутой шкалы все почернения монохроматических изображений туманности и соответствующих мест спектра звезды были переведены в интенсивности. Эти интенсивности были выражены в произвольных единицах.

Интегрированием интенсивностей на монохроматических изображениях туманности внутри поверхности, соответствующей одной квадратной секунде дуги, были определены выраженные в произвольных единицах яркости одной квадратной секунды дуги соответствующего монохроматического изображения $i_{n\lambda}$. С другой стороны, интегрированием интенсивностей в той же самой области спектра звезды внутри 1А вдоль спектра и по всей ее высоте были получены интенсивности 1А соответствующей области непрерывного спектра звезды сравнения, выраженные в тех же единицах. Мы обозначаем эти интенсивности через $i_{*\lambda}$. Отношение

$$P_{\lambda} = \frac{i_{n\lambda}}{i_{*\lambda}} \quad (1)$$

не зависит от выбранных единиц интенсивности.

Использованный метод в известной степени аналогичен методу, использованному Занстра. Различие лишь в звезде сравнения. У Занстра в качестве звезды сравнения всегда выбиралась центральная звезда туманности, а не какая-либо иная. С другой стороны, интегрирование у Занстра распространяется на все монохроматическое изображение, в то время как у нас интегрирование распространено на одну квадратную секунду дуги.

Далее было принято, что распределение энергии в спектре карлика типа G0 тождественно распределению ее в спектре Солнца. Отсюда следует: если $i_{\odot\lambda}$ интенсивность 1А непрерывного спектра Солнца в той же области, то мы имеем:

$$\lg \frac{i_{\odot\lambda}}{i_{*\lambda}} = 0.4 (m_* - m_{\odot}), \quad (2)$$

где m_* и m_{\odot} — видимые визуальные величины звезды и Солнца. Это уравнение относится к любой спектральной области.

Предположим, что S — поверхность диска Солнца в квадратных секундах дуги. Легко видеть, что для интенсивности излучения k_{λ} квадратной секунды дуги солнечного диска в участке длин волн в 1А данной области спектра имеем:

$$\lg \frac{k_{\lambda}}{i_{*\lambda}} = 0.4 (m_* - m_{\odot}) - \lg S. \quad (3)$$

Из (1) и (3) находим:

$$\lg \frac{i_{n\lambda}}{k_{\lambda}} = \lg P_{\lambda} - 0.4 (m_* - m_{\odot}) + \lg S. \quad (4)$$

Величины P_{λ} известны из измерений. Следовательно, мы можем вычислить левую часть уравнения (4), т. е. отношение яркости квадратной секунды дуги монохроматического изображения туманности к яркости квадратной секунды дуги диска Солнца внутри 1А, в той же спектральной области.

По закону независимости поверхностной яркости от расстояния это отношение равно отношению количества энергии E_{λ} , излучаемой 1 см² диска туманности, к энергии, излучаемой 1 см² диска Солнца внутри 1А той же спектральной области в пределах единичного телесного угла.

Последняя величина нам известна и отсюда мы можем вычислить величину E_{λ} энергии, излучаемой в соответствующей длине волны 1 см² диска туманности в одну секунду в единице телесного угла.

Результаты измерений. Всего получено три спектрограммы туманностей: две спектрограммы ярчайших планетарных туманностей и одна спектрограмма части туманности Ориона, расположенной на расстоянии $10''$ в направлении к юго-востоку от главной звезды Трапеции. В первом столбце табл. 1 приведен номер туманности по *NGC*, во втором — дата наблюдения, в третьем — название звезды сравнения и в четвертом — ее визуальная величина.

Таблица 1

Туманность	Дата	Звезда сравнения	
<i>NGC</i> 6572	16 августа 1932	15 Sagitta	^m 5.89
7027	31 августа	Lal. 37120	6.6
1976	11 сентября	112 Piscium	5.84

В табл. 2 приведены вычисленные по формуле (4) величины $\log i_{nl}/k_\lambda$ для различных спектральных линий. При этом принято: $m_\odot = -26.72$.

Таблица 2

Туманность	Линия			
	H_β	1686	H_γ	H_δ
<i>NGC</i> 6572	-7.30	—	-7.72	-8.11
7027	-7.47	-7.94	-7.83	—
1976	-7.95	—	-8.27	—

Далее, описанным методом вычислены значения E_λ для каждой спектральной линии, т. е. количества энергии, излучаемые 1 см^2 диска туманности в одну секунду и в единице телесного угла. В эти вычисления входит величина k_λ . Величины k_λ для различных длин волн вычислены при предположении, что эффективная температура карлика типа G0 равна 6000° . Значения $\log E_\lambda$, где E_λ выражены в $\text{эрг. сек}^{-1} \cdot \text{см}^{-2}$, приведены в табл. 3. Умножением этих величин на 4π мы можем получить количества энергии, которые излучаются в соответствующей спектральной линии в одну секунду атомами, находящимися в цилиндре, ось которого совпадает с лучом зрения, и поперечное сечение которого 1 см^2 .

Таблица 3

Туманность	Л и н и я			
	$H\beta$	4686	$H\gamma$	$H\delta$
NGC 6572	-1.00	—	-1.46	-1.87
7027	-1.17	-1.68	-1.57	—
1976	-1.65	—	-2.01	—

Точность приведенных в табл. 3 значений не должна переоцениваться. По всей вероятности ошибка порядка 0.1 (= 0.25^m). Особенно трудно определение яркости изображения в линии $H\beta$, так как, с одной стороны, в этой области очень резко меняется чувствительность фотопластинки с длиной волны (необходимо, однако, сравнивать точно с тем же местом звездного спектра) и, с другой, в том же месте спектра звезды имеется широкая линия $H\beta$.

Сравнение с результатами Бермана [1] об относительных яркостях монохроматических изображений планетарных туманностей NGC 6572 и 7027 показывает хорошее совпадение для последней и большие различия для первой. Не следует забывать, что Берман привел в качестве конечного результата полные яркости, в то время как мы ограничиваемся поверхностными яркостями центральных частей туманностей. Мы сопоставили полные яркости по Берману с нашими поверхностными яркостями (в звездных величинах); при этом в обоих случаях мы приняли для H величину 0.0^m.

Таблица 4

Туманность	Наблюдатель	Л и н и я			
		$H\beta$	4686	$H\gamma$	$H\delta$
NGC 6572	Берман	0.00 ^m	—	0.60 ^m	1.16 ^m
	Амбарцумян	0.00	—	1.05	2.02
7027	Берман	0.00	1.03	1.02	—
	Амбарцумян	0.00	1.27	1.00	—

Если соответствующая спектральная линия связана с квантовым переходом $k \rightarrow l$, то мы имеем:

$$4\pi E_\lambda = n_k h \nu A_l^k, \tag{5}$$

где n_k — число атомов в k -том состоянии, заключенных в упомянутом цилиндре, а A_i^k — эйнштейновский коэффициент вероятности для соответствующего спонтанного излучения. Мы использовали следующие значения коэффициентов вероятности:

Линия	H_β	4686	H_γ	H_δ
А	$0.84 \cdot 10^7$	$14.5 \cdot 10^7$	$0.25 \cdot 10^7$	$1.00 \cdot 10^6$

Вероятности переходов для водородных линий взяты из работы Слакка [2], а для линии 4686 — из формулы автора [3].

Значения $\log_{10} n_k$ для различных туманностей и линий, вычисленные по формуле (5), приведены в табл. 5.

Таблица 5

Туманность	Л и н и я			
	H_β	4686	H_γ	H_δ
<i>NGC</i> 6572	4.56	—	4.58	4.54
7027	4.39	2.63	4.47	—
1976	3.91	—	4.03	—

Значения, приведенные в табл. 5, получены при предположении, что туманности прозрачны в этих линиях. Если это не так, то необходимо учитывать самообращение. Предположение о прозрачности туманности основано на том факте, что при присутствии поглощения в спектрах центральных звезд должны появиться соответствующие линии поглощения. До сих пор линии поглощения, обусловленные туманностями, никогда не наблюдались.

Приведенные в табл. 5 значения могут показаться на первый взгляд слишком малыми, но легко показать, что эти числа находятся в согласии с теоретическими значениями, по крайней мере по порядку величины. Далее, не следует забывать, что мы здесь исследовали только ярчайшие газовые туманности. По данным Кертиса об отношении экспозиций различных планетарных туманностей у большей части этих небесных тел фотографические поверхностные яркости в несколько десятков раз меньше, чем у упомянутых выше планетарных туманностей. Поэтому величины n_k для этих объектов должны быть в несколько десятков раз меньше, чем эти же величины для *NGC* 6572 и 7027.

Некоторые теоретические замечания. Подробное теоретическое исследование, связанное с предметом настоящей работы, как упоминалось выше, появится позже. Здесь мы ограничимся лишь следующими замечаниями. Если мы рассматриваем атом, который может находиться только в двух квантовых состояниях, то легко видеть, что отношение чисел n_2 и n_1 атомов в возбужденном и основном состояниях выражается формулой:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} W \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 + W}. \quad (6)$$

Так как W для планетарных туманностей очень мало (порядка 10^{-13}), мы можем написать вместо (6)

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} W \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}, \quad (7)$$

где $h\nu$ — разность энергий между двумя состояниями, g_2 и g_1 — статистические веса состояний, $4\pi W$ — телесный угол, под которым видна центральная звезда из рассматриваемой точки туманности, а T — температура этой звезды.

Конечно, формула (6) не может быть применена к реальным атомам. Но она дает правильный порядок величины, если только рассматриваемое возбужденное состояние не метастабильно и если под n_1 понимать число атомов в основном состоянии (а не в нижнем состоянии, соответствующем данному переходу).

Рассмотрим, например, пятый уровень атома водорода в туманности NGC 6572. В этом случае $g_5/g_1 = 25$ и $T = 43\,000^\circ$. Примем, далее, для этой туманности $W = 10^{-13}$, и для ν частоту возбуждающего излучения, т. е. частоту коротковолнового конца серии Лаймана. Тогда мы найдем, что по порядку величины

$$\frac{n_5}{n_1} \approx 10^{-13}.$$

Для того, чтобы найти приближенные значения n_5 , необходимо знать n_1 , т. е. число водородных атомов в нормальном состоянии, находящихся в цилиндре, ось которого совпадает с лучом зрения и поперечное сечение которого равно 1 см^2 . Так как по Шугиура коэффициент поглощения, рассчитанный на атом, на границе серии Лаймана равен для водорода $0.5 \cdot 10^{-17}$, то почти полное поглощение (пропуска-

5 Труды

ние доли $1/e$) требует $2 \cdot 10^{17}$ водородных атомов на квадратный сантиметр. Из исследования Занстра известно, что поглощение ультрафиолетового излучения звезды в туманности почти полное. Поэтому мы должны принять, что по порядку величин $n_1 \geq 2 \cdot 10^{17}$. Но так как возбуждение атомов происходит только в той части туманности, где излучение звезды не очень ослаблено, то мы можем принять $n_1 = 2 \cdot 10^{17}$. Отсюда следует:

$$n_3 = 2 \cdot 10^4,$$

что по порядку величины совпадает с результатами наблюдений. Так как при высоких температурах экспонента в (7) мало меняется, то мы можем по наблюдаемым значениям n_3 судить о величине W .

Я хотел бы выразить свою глубокую благодарность профессору Г. А. Шайну за многочисленные советы и помощь при проведении работы.

Пулково, Обсерватория.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. L. Veigman, Lick Observatory Bulletin, **15**, 99, 1931.
2. Slack, Phys. Rev., **31**, 527, 1928.
3. В. А. Амбарцумян, Цирк. Пулк. обс., № 4, 11, 1932.

ОБ ИНТЕНСИВНОСТЯХ $\lambda 4686$ И H_{β} В ЗВЕЗДАХ ВОЛЬФ-РАЙЕ*

В предыдущей статье [1] автор предложил метод для определения температур ядер планетарных туманностей по отношению интенсивностей $\frac{\lambda 4686}{H_{\beta}}$. Этот метод дает возможность определить температуры даже слабых ядер, потому что он не связан с наблюдениями самих ядер. Однако этот метод основан на предположении полного поглощения излучения за пределом серии Лаймана нормальными атомами водорода туманности, так же как и на предположении полного поглощения излучения с длиной волны меньше 230 Å однажды ионизованными атомами гелия.

Первое из этих предположений, конечно, не осуществляется в газовых оболочках звезд Вольф-Райе и в этом причина, почему наш метод не может быть применен к звездам Вольф-Райе, хотя механизм образования эмиссионных полос в спектрах Вольф-Райе такой же, как и образования небулярной эмиссии. Действительно, температуры некоторых звезд Вольф-Райе порядка 70 000° [2, 3]. При такой температуре мы находим для отношения интенсивностей $\frac{\lambda 4686}{H_{\beta}}$ величину

$\frac{1}{100}$ ([1], стр. 10), если предположения, на которых основан наш метод, выполняются. Однако беглый взгляд на микрофотограммы спектров звезд Вольф-Райе убеждает, что H_{β} слабее, чем $\lambda 4686$, несмотря на то, что H_{β} блендируется с линией He II. Поэтому мы должны считать, что только небольшая часть излучения между 230 Å и 918 Å поглощается атомами водорода. В таких случаях применение нашего метода должно дать абсурдно высокие температуры.

Однако имеется другая важная физическая характеристика для

* On the Intensities of $\lambda 4686$ and H_{β} in the Wolf-Rayet Stars. Цирк. Пулк. обс., № 7, 1933.

газовых оболочек, которая может быть выведена из отношения интенсивностей $\frac{\lambda}{H\beta} \frac{4686}{H\beta}$ независимо от основных предположений нашей предыдущей статьи. Эта характеристика будет обсуждаться в настоящей заметке.

Общее число захватов электронов за 1 сек в 1 см^3 на n -ый уровень водородных атомов по Силлие [4] равно:

$$n_p u \frac{2^9 \pi^5}{(6\pi)^{3/2}} \frac{\epsilon^{10}}{m^2 c^3 h^3} \left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2} \frac{1}{n^3} e^{\frac{\chi_n}{kT}} Ei\left(\frac{\chi_n}{kT}\right), \quad (1)$$

где n_p и u — числа протонов и свободных электронов в 1 см^3 соответственно, ϵ — заряд протона, m — масса электрона, c , h и k — обычные мировые постоянные, T — температура рассматриваемого газа и χ_n — потенциал ионизации атома водорода на n -ом уровне. Выражение (1) может быть написано в виде:

$$C n_p u M(n, T), \quad (2)$$

где

$$M(n, T) = \frac{1}{T^{3/2}} \frac{1}{n^3} e^{\frac{\chi_n}{kT}} Ei\left(\frac{\chi_n}{kT}\right). \quad (3)$$

Подобно этому, общее число захватов электронов за 1 сек в 1 см^3 на n -ый уровень водородоподобного атома есть:

$$C n_a u M'(n, T), \quad (4)$$

где

$$M'(n, T) = \frac{Z^4}{T^{3/2}} \frac{1}{n^3} e^{\frac{\chi'_n}{kT}} Ei\left(\frac{\chi'_n}{kT}\right). \quad (5)$$

Здесь C — та же постоянная, что и в (2), n_a есть число свободных ядер с зарядом $Z\epsilon$ в 1 см^3 и χ'_n — n -ый потенциал ионизации водородоподобного атома с таким ядром. В случае, когда $Z=2$, n_a — число α -частиц или атомов He^{++} , и χ'_n есть n -ый потенциал ионизации He^+ .

Пусть N_n есть число водородных атомов в 1 см^3 в n -ом состоянии в любой момент. Согласно Силлие мы имеем:

$$N_n \sum_{r=2}^{n-1} A_{n,r} = n_p u C M(n, T) + \sum_{r=1}^{\infty} N_{n+r} A_{n+r,n}, \quad (6)$$

где $A_{s,r}$ есть вероятность спонтанного перехода $s \rightarrow r$ ($s > r$).

Решая эти уравнения, мы находим для N_1

$$N_4 = 10^{-8} n_p \gamma C [5.719 M(4, T) + 2.087 M(5, T) + 1.808 M(6, T) + 1.860 M(7, T) + \dots]. \quad (7)$$

Для атомов He^+ вероятности спонтанных переходов в 16 раз больше, чем соответствующие вероятности для водорода, и уравнения для чисел атомов He^+ на n -ом уровне N'_n могут быть написаны в виде:

$$16 N'_n \sum_{r=2}^{n-1} A_{n,r} = n_a \gamma C M'(n, T) + 16 \sum_{r=1}^{\infty} N'_{n+r} A_{n+r,n}. \quad (7')$$

Решая эти уравнения, получаем:

$$N'_4 = 10^{-8} n_a \gamma \frac{C}{16} [5.719 M'(4, T) + 2.087 M'(5, T) + 1.808 M'(6, T) + 1.860 M'(7, T) + \dots]. \quad (8)$$

Для отношения $\frac{N'_4}{N_4}$ мы поэтому находим:

$$\frac{N'_4}{N_4} = \frac{n_a}{n_p} \vartheta,$$

где

$$\vartheta = \frac{1}{16} \frac{5.719 M'(4, T) + 2.087 M'(5, T) + 1.808 M'(6, T) + 1.860 M'(7, T) + \dots}{5.719 M(4, T) + 2.087 M(5, T) + 1.808 M(6, T) + 1.860 M(7, T) + \dots} \quad (8')$$

Согласно (3) и (5) мы имеем:

$$\frac{M'(n, T)}{M(n, T)} = Z^4 \frac{e^{\frac{\chi'_n}{kT}} Ei\left(\frac{\chi'_n}{kT}\right)}{e^{\frac{\chi_n}{kT}} Ei\left(\frac{\chi_n}{kT}\right)}. \quad (9)$$

Здесь $\chi'_n = 4\chi_n$ и если мы обозначим $\frac{\chi_n}{kT} = x$, то получаем:

$$\frac{M'(n, T)}{M(n, T)} = Z^4 \frac{e^{4x} Ei(4x)}{e^x Ei(x)} = Z^4 \frac{e^{4x} \int_{4x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt}{e^x \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt} = Z^4 \frac{\int_0^{\infty} \frac{e^{-y}}{y+4x} dy}{\int_0^{\infty} \frac{e^{-y}}{y+x} dy} = Z^4 Q, \quad (10)$$

где

$$\frac{1}{4} < Q < 1, \quad (11)$$

поскольку

$$\frac{1}{4} \int_0^{\infty} \frac{e^{-y}}{y+x} dy < \int_0^{\infty} \frac{e^{-y}}{y+4x} dy < \int_0^{\infty} \frac{e^{-y}}{y+x} dy.$$

Таким образом,

$$4 < \frac{M'(n, T)}{M(n, T)} < 16$$

и

$$\frac{1}{4} < \vartheta < 1. \quad (12)$$

Отношение интенсивностей $\frac{\lambda 4686}{H\beta} = \frac{I'_{43}}{I_{42}}$ связано с N_4 и N'_4 посредством уравнения

$$\frac{I'_{43}}{I_{42}} = \frac{A'_{43}}{A_{42}} \frac{h\nu'_{43}}{h\nu_{42}} \frac{N'_4}{N_4}. \quad (13)$$

Сравнивая (8) и (13), находим

$$\frac{n_{\alpha}}{n_{\beta}} = \frac{1}{\vartheta} \frac{\lambda'_{43}}{\lambda_{42}} \frac{A_{42}}{A'_{43}} \frac{I'_{43}}{I_{42}}. \quad (14)$$

По известным величинам A_{42} , A'_{43} , λ'_{43} и λ_{42} мы имеем:

$$\frac{\lambda'_{43}}{\lambda_{42}} \frac{A_{42}}{A'_{43}} = \frac{1}{18}. \quad (15)$$

Далее из (12) находим

$$1 < \frac{1}{\vartheta} < 4.$$

Поэтому

$$\frac{1}{18} \frac{I'_{43}}{I_{42}} < \frac{n_{\alpha}}{n_{\beta}} < \frac{2}{9} \frac{I'_{43}}{I_{42}}. \quad (16)$$

В личном письме автору д-р Билс сообщил некоторые результаты измерений полос H и He^+ в спектрах звезд Вольф-Райе. Согласно Билсу мы имеем $\frac{I_{42}}{I'_{43}} = 0.03$. Для рассматриваемого отношения

получаем:

$$1.8 < \frac{n_{\alpha}}{n_p} < 7.2. \quad (17)$$

Этот результат в некоторой степени удивителен. Ионизация H в оболочках звезд Вольф-Райе должна быть более сильной, чем ионизация He^+ . Отношение числа атомов He^+ к числу нейтральных атомов водорода будет поэтому во много раз больше, чем отношение $\frac{n_{\alpha}}{n_p}$. Вдобавок имеется небольшое число нейтральных атомов гелия.

Ясно, что для отношения общего числа атомов He во всех состояниях ионизации $n_{\alpha+He^++He}$ к общему числу атомов водорода (ионизованных и нейтральных) n_{p+H} , мы будем иметь:

$$\frac{n_{\alpha+He^++He}}{n_{p+H}} > 1.8.$$

Таким образом, гелий более обилен в оболочках звезд Вольф-Райе, чем водород. Вопрос о том, связано ли это обилие гелия с селективным давлением излучения или с составом внешних слоев звезд Вольф-Райе, не может быть трактован здесь.

ЛИТЕРАТУРА

1. V. Ambarzumian, Poulk. Obs. Circ., № 4, p. 8, 1932.
2. V. Ambarzumian, Nature, **129**, 725, 1932.
3. C. S. Beals, MN, **92**, 677, 1932.
4. Cillié, MN, **82**, 823, 1932.

Примечание. На протяжении статьи автор неявно допускает, что оболочка звезды Вольф-Райе, дающая эмиссионные полосы, прозрачна как в линии $H\beta$, так и в линии $\lambda 4686$.

О МАССАХ ГАЗОВЫХ ОБОЛОЧЕК, ВЫБРОШЕННЫХ НОВЫМИ ЗВЕЗДАМИ*

(Поступило 26 сентября 1933 г.)

Масса газовой оболочки, выброшенной Новой порядка
 10^{-5} солнечных масс

Представление о том, что при вспышке новой звезды происходит процесс перехода из одного равновесного состояния в другое, по-видимому, теперь признано всеми. Однако состояние, наступающее после вспышки, не совсем устойчивое, так как, с одной стороны, еще имеют место небольшие изменения яркости и, с другой стороны, спектр, по крайней мере в некоторых случаях, соответствует типу Вольф-Райе, что указывает на непрерывное истечение материи. Было бы, вероятно, правильнее назвать это состояние квазиустойчивым, что характеризует отсутствие каких-либо катастрофических изменений, подобных тем, которые происходят при вспышках.

Для исследования природы Новых имеет важное значение определение массы газовой оболочки, выброшенной при вспышке. Хотя точное определение массы газовой оболочки в высшей степени трудная задача, можно, как кажется, предложить несколько способов для, по крайней мере грубой, ее оценки.

§ 1. При вспышке Новой имеет место быстрое возрастание интенсивности непрерывного спектра, благодаря расширению выброшенной оболочки.

Если температура поверхности T , то мы имеем:

$$L = 4\pi r^2 \sigma T^4, \quad (1)$$

где L — светимость, r — радиус оболочки, а σ — постоянная Стефана.

Однако эта формула действительна лишь до тех пор, пока оптическая толщина оболочки τ_0 большая. Если температура оболочки во время расширения постоянна (как можно заключить из спектра), то

* Über die Massen der von den neuen Sternen ausgestossenen Gashüllen. Z. f. Ap., 7, 320, 1933. Соавтор Н. А. Козырев.

яркость звезды возрастает пропорционально квадрату радиуса оболочки. Однако при расширении оболочки ее оптическая толщина τ_0 уменьшается и когда τ_0 становится меньше единицы, начинается, как мы покажем, ослабление яркости оболочки. В самом деле, для τ_0 мы имеем:

$$\tau_0 = \int_{r_1}^r \kappa \rho \, dr = \alpha \int_{r_1}^r \frac{x P_e \rho}{T^{3/2}} \, dr,$$

где κ — коэффициент поглощения, α — величина постоянная, P_e — электронное давление, x — степень ионизации, ρ — плотность, а r_1 и r — радиусы внутренней и внешней границ оболочки. Мы имеем:

$$P_e = n_e k T; \quad \rho = n m,$$

где k — газовая постоянная, m — средняя масса атома, n_e — число электронов в единице объема и n — соответствующее число атомов. При температуре оболочки $T = 7000^\circ$ (тип F) можно принять, что все атомы в среднем однажды ионизованы и следовательно

$$x = 1, \quad n = n_e.$$

Поэтому

$$\tau_0 = \alpha k T^{-3/2} m \int_{r_1}^{r_2} n^2 \, dr.$$

Заменив n через его среднее значение \bar{n} , получим:

$$\tau_0 = \alpha k T^{-3/2} m \bar{n}^2 (r_2 - r_1).$$

Физически ясно, что линейная толщина оболочки не остается постоянной, а будет возрастать и при больших значениях r/r^* (r^* — радиус звезды) достигнет по порядку величины r . Если желательно определить только порядок величины массы, то можно $r - r_1$ заменить через r .

Тогда будет:

$$\tau_0 = \alpha k T^{-3/2} m \bar{n}^2 r. \tag{2}$$

Так как из вышеупомянутых объяснений следует, что $n \sim 1/r^3$, то

$$\tau \sim r^{-5}.$$

С другой стороны, полное излучение оболочки, оптическая толщина которой значительно меньше единицы, должно определяться формулой

$$L = 4\pi r^2 \tau \sigma T^4,$$

откуда следует, что при постоянном T

$$L \sim r^{-3}, \quad (1a)$$

т. е. яркость всей оболочки убывает.

Выведенные здесь простые формулы не могут, однако, непосредственно сравниваться с кривой яркости, так как в действительности выбрасывается не одна, а несколько оболочек и имеет место сложение многих представляемых уравнениями (1) и (1a) кривых.

Во время максимальной яркости звезды оптическая толща очевидно должна быть близка к единице. Следовательно, согласно (2),

$$\bar{n} = \frac{T^{3/4}}{\sqrt{\alpha k m r}}. \quad (3)$$

Общее число атомов в оболочке поэтому есть:

$$N = \frac{4}{3} \pi r^{5/2} \frac{T^{3/4}}{\sqrt{\alpha k m}}, \quad (4)$$

откуда видно, что при одинаковой температуре N пропорционально $r^{5/2}$ или $L_{\max}^{5/4}$. Некоторые авторы придерживаются взгляда, что L_{\max} для всех Новых (исключая „исключительные Новые“ типа S Андромеды) имеет почти одно и то же значение. В этом случае масса выброшенной оболочки также приблизительно должна быть постоянной.

Если принять, что Новая в максимуме на 11^m ярче Солнца, то для максимума получается:

$$r = 10^{13} \text{ см.}$$

Если подставлять снова $T = 7000^\circ$ и $\alpha = 5,62 \cdot 10^{19} \chi^2/a$ (где χ — потенциал ионизации в электрон-вольтах, а a — атомный вес) и предполагать, что оболочка состоит, главным образом, из водорода или гелия (или их смеси), то получается:

$$N = 4 \cdot 10^{50}.$$

Если принять, что средний атомный вес в оболочке равен 4, что вероятно близко к действительности, то масса оболочки будет:

$$\mu = 2,6 \cdot 10^{27} \text{ грамм,}$$

т. е. величина порядка одной миллионной солнечной массы.

§ 2. Другой способ оценки массы выброшенной оболочки основывается на определении момента, когда эмиссионная полоса He^+ λ 4686 достигает максимума своей яркости.

Обыкновенно в спектрах Новых тотчас после максимума их яркости появляются эмиссионные полосы атомов с низким потенциалом ионизации (H и Fe^+) и лишь через некоторое время наблюдается полоса $\lambda 4686 He^+$, яркость которой быстро растет и позже начинает уменьшаться. Это явление может быть интерпретировано в согласии с теорией свечения туманностей следующим образом.

Температура ядра Новой растет очень быстро. Излучение ядра за границей главной серии He^+ ($230A$) будет полностью поглощаться оболочкой и создавать в последней ионизацию H^+ -ионов. При рекомбинациях возникает между прочим линия $\lambda 4686$. Когда повышается температура, возрастает также интенсивность ультрафиолетового излучения по ту сторону от $230A$ и вместе с ней яркость $\lambda 4686$. Однако это возрастание яркости происходит лишь до тех пор, пока оптическая толщина слоя ионизованного гелия в соответствующих частотах будет оставаться больше единицы и ультрафиолетовое излучение ($\lambda < 230A$) почти полностью будет поглощаться.

Однако при диссипации оболочки наступает момент, когда она становится прозрачной для длин волн, меньших, чем $230A$, и тогда, несмотря на высокую температуру ядра, линия $\lambda 4686$ начинает слабеть.

Следовательно, когда оптическая толщина оболочки почти равна единице, линия $\lambda 4686$ достигает своей максимальной интенсивности. Согласно Шугиура коэффициент поглощения He^+ иона в области от $\lambda = 230A$ равен $0.12 \cdot 10^{-17}$, т. е. при оптической толщине, равной единице, цилиндр с поперечным сечением 1 см^2 должен содержать в себе $8 \cdot 10^{17} He^+$ -ионов.

Мы не располагаем никакими точными фотометрическими наблюдениями максимума этой или иной линии в спектрах Новых. Однако кажется, что в случае Новой Живописца этот максимум наступил через три года после вспышки. Так как скорость расширения наиболее интенсивной оболочки Новой Живописца была 300 км/сек , то радиус оболочки в момент максимума $\lambda 4686$ должен был быть порядка $3 \cdot 10^{15} \text{ см}$. Отсюда следует, что общее число He^+ -ионов в оболочке было порядка $3 \cdot 10^{19}$.

Для определения всей массы гелиевой оболочки следует сюда добавить число атомов He и He^{++} (α -частиц). Число атомов He очень мало и можно им пренебречь. Число α -частиц может быть вычислено из формулы ионизации. Для этого должно быть известно число свободных электронов в единице объема. Однако, как в случае звезд типа Вольф-Райе, спектры Новых указывают на то, что в их оболочках гелий присутствует в значительно больших количествах, чем во-

дород. Это говорит за то, что в первом приближении все свободные электроны могут считаться оторванными от атомов гелия и легко понять, что дважды ионизованные атомы гелия будут находиться в большинстве. Поэтому

$$n_e = 2n_\alpha,$$

где n_α — число α -частиц в кубическом сантиметре.

Тогда формула ионизации примет вид:

$$2 \frac{n_\alpha^2}{n_{He^+}} = W \cdot 1,22 \cdot 10^{15} T^{3/2} e^{-\frac{620\,000}{T}}, \quad (5)$$

где n_{He^+} — число He^+ -ионов в 1 см^3 и W — множитель дилуции:

$$W = \frac{1}{4} \left(\frac{r_*}{r} \right).$$

Согласно вышеизложенному, мы имеем:

$$n_{He^+} = \frac{8 \cdot 10^{17}}{3 \cdot 10^{15}} = 270.$$

Кроме того, при $r_* = 10^{11} \text{ см}$ (звезда карлик!)

$$W = 0,25 \cdot 10^{-9}.$$

Если принять $T = 62\,000^\circ$, что соответствует звездам Вольф-Райе с яркой полосой $\lambda 4686$, то из (5) получится

$$n_\alpha = 1,8 \cdot 10^5.$$

Следовательно число He^+ -ионов действительно мало по сравнению с числом α -частиц.

Полное число атомов He (в различных состояниях ионизации) во всей оболочке будет:

$$N = 10^{52},$$

что в 25 раз больше, чем число, найденное первым способом.

Недостаток этого метода состоит в том, что момент максимальной яркости линии $\lambda 4686$, испускаемой оболочкой, определяется недостаточно точно, не только из-за переменности непрерывного спектра, с которым обыкновенно сравнивается яркость, но также вследствие того, что звезда через некоторое время после вспышки превращается в звезду Вольф-Райе с относительно яркой линией $\lambda 4686$. Как раз в случае Новой Живописца наблюдения не дают возможности разделить друг от друга эти два максимума. Поэтому вышеприве-

денное число следует значительно уменьшить. Весьма вероятно, что действительная масса оболочки порядка $\frac{1}{100.000} \odot$.

Метод § 2 был уже применен, по существу, Занстра к планетарным туманностям и их массы оказались равными 0,01 солнечной массы. Следовательно, массы планетарных туманностей в несколько тысяч раз больше масс оболочек, выброшенных Новыми. Кажется, что основное различие между этими двумя объектами состоит как раз в их массах.

В заключение можно упомянуть, что оба равновесные состояния Новой до и после ее вспышки отличаются друг от друга по своей массе незначительно.

Ленинград, Оптический институт, август 1933 г.

Примечание. Метод определения масс оболочек Новых, предложенный в § 1 этой статьи, более подробно изложен в книге В. А. Амбарцумяна „Теоретическая астрофизика“ (1939). В настоящее время существуют более точные методы определения масс оболочек Новых. Они приводят к значениям масс оболочек порядка $10^{-5} - 10^{-4} M_{\odot}$ в согласии с первой оценкой этой величины, данной в приведенной выше работе.

ОБ ИОНИЗАЦИИ В НЕБУЛЯРНОЙ ОБОЛОЧКЕ, ОКРУЖАЮЩЕЙ ЗВЕЗДУ*

(Сообщено Э. А. Милном)

Едва ли в настоящее время имеются сомнения в том, что эмиссионные линии в спектрах звезд Ве, так же как и эмиссионные полосы в спектрах звезд Вольф-Райе, возникают в протяженных и разреженных атмосферах, которые образуют своего рода небулярные оболочки, окружающие эти звезды. Недавно рядом наблюдателей были собраны некоторые наблюдательные данные об эмиссионных линиях и полосах и их интенсивностях. Точная теоретическая интерпретация этих данных будет возможна лишь в свете ионизационной теории для подобных протяженных оболочек. Такой теории в настоящее время не существует. Попытка очертить контуры такой теории сделана в настоящей статье.

Ясно, что ионизация зависит главным образом от плотности соответствующего „ультрафиолетового“ излучения в данной точке атмосферы. Как только мы оценим эту плотность, наша проблема будет приблизительно решена. Но расчет этой плотности возможен только на базе теории лучистого равновесия в этих атмосферах. Поэтому проблема ионизации есть в сущности проблема лучистого равновесия.

Теория лучистого равновесия планетарных туманностей была предложена автором настоящей статьи в двух предыдущих статьях [1, 2]. Однако имеется важное различие в характере лучистого равновесия в планетарных туманностях и в небулярных оболочках сравнительно малого радиуса, окружающих звезды с эмиссионными линиями.

В нескольких словах это различие может быть объяснено следующим образом. В предыдущих статьях мы показали, что преобразование квантов ультрафиолетового континуума в кванты резонансной линии водородного атома (L_{α}), с одной стороны, и большая оптиче-

* On the Ionisation in the Nebular Envelope surrounding a Star. MN, **95**, 469, 1935.

ская толща планетарных туманностей в резонансной частоте, с другой, приводят к очень большой плотности L_α -излучения во внутренних частях планетарной туманности. Несмотря на то, что эта плотность более чем в 10^9 раз превышает плотность прямого L_α -излучения, падающего от звезды на внутреннюю границу туманности, она все же во много тысяч раз меньше, чем плотность L_α -излучения на поверхности центральной звезды, так как коэффициент дилуции излучения W порядка 10^{-13} . Следовательно, относительное число атомов во втором состоянии также мало по сравнению с таковым на поверхности звезды и мы еще можем пренебречь переходами со второго уровня на более высокие.

Действительно, мы знаем, что число таких переходов в каждую секунду пропорционально $n_2 \rho_{23}$, где n_2 — число атомов на втором уровне в 1 см^3 и ρ_{23} — плотность соответствующего излучения. Для n_2 мы имеем приблизительно $n_2 \cong n_1 \frac{\rho_{12}}{\tau_{12}}$, где ρ_{12} — плотность излучения, соот-

ветствующего переходу $1 \rightarrow 2$, и $\sigma_{12} = \frac{8\pi h\nu_{12}^3}{c^3}$. Следовательно, число

переходов $2 \rightarrow 3$ пропорционально $n_1 \bar{\rho}_{12} \rho_{23}$, в то время как число переходов $1 \rightarrow 3$ пропорционально $n_1 \rho_{13}$. Коэффициенты пропорциональности в обоих случаях являются величинами одного порядка. Далее, на поверхности звезды мы приблизительно имеем:

$$(\bar{\rho}_{13})_{\text{поверх.}} = (\bar{\rho}_{12})_{\text{поверх.}} \cdot (\bar{\rho}_{23})_{\text{поверх.}} \quad (\text{A})$$

В туманности мы имеем $(\bar{\rho}_{13})_{\text{тум.}} \cong W (\bar{\rho}_{13})_{\text{поверх.}}$, $(\bar{\rho}_{23})_{\text{тум.}} = W (\rho_{23})_{\text{поверх.}}$ и $(\bar{\rho}_{12})_{\text{тум.}} = \varepsilon (\bar{\rho}_{12})_{\text{поверх.}}$, где ε , как было отмечено выше — малая величина порядка 10^{-4} .

Поэтому, принимая во внимание (A), мы находим:

$$(\bar{\rho}_{21})_{\text{тум.}} (\bar{\rho}_{23})_{\text{тум.}} \cong \varepsilon (\bar{\rho}_{13})_{\text{тум.}}$$

или

$$n_1 (\bar{\rho}_{13})_{\text{тум.}} (\rho_{23})_{\text{тум.}} \cong n_1 \frac{\nu_{23}^3}{\nu_{13}^3} \varepsilon (\rho_{13})_{\text{тум.}}$$

и мы видим, что число переходов $2 \rightarrow 3$ составляет пренебрежимую долю числа переходов $1 \rightarrow 3$. В то же время значительная часть атомов, приходящих в третье состояние, спонтанно переходит во второе, и мы можем сказать, следовательно, что число переходов $2 \rightarrow 3$ пренебрежимо мало по сравнению с числом переходов $3 \rightarrow 2$. Иными словами, мы можем пренебречь числом циклических переходов типа

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ по сравнению с числом циклических переходов типа $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$.

В соответствии с этим метод, развитый в наших предыдущих статьях, где переходы $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ были пренебрежены, применим к планетарным туманностям.

Однако он не может применяться в случаях, когда разрежение излучения не столь велико, как в планетарных туманностях. Поэтому он ни в коем случае неприменим к газовым оболочкам звезд Вольф-Райе и Ве. В звездах типа Вольф-Райе оболочки непосредственно соприкасаются с поверхностями звезд и максимум плотности имеет место на самой поверхности. В этом случае, например, W — порядка единицы, и наш метод конечно неприменим. В то же время, мы не можем в этом случае ограничиться рассмотрением монохроматического лучистого равновесия, как мы делаем это в случае обращаемого слоя звезд для резонансных линий, используя то обстоятельство, что циклические переходы происходят относительно реже, чем переходы типа $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. Фактически, хотя это еще справедливо в случае звезд Вольф-Райе, мы не можем пренебречь циклическими переходами, так как только эти переходы ответственны за появление эмиссионных линий (или полос).

На первый взгляд кажется сомнительным, необходимо ли принимать во внимание частичную компенсацию „прямых“ циклических процессов, соответствующих явлению флюоресценции ($1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$), обратными процессами ($1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$), если мы признаем, что наша теория должна иметь только качественный характер, обусловленный рядом других приближений физической и геометрической природы. Нам кажется, что для вопроса об окончательных интенсивностях эмиссионных линий имеет мало значения, примем мы во внимание обратные процессы или нет. Но если нашей целью является расчет степени ионизации в оболочках, различие между этими двумя случаями будет очень большим. Точные формулы мы дадим ниже, но даже сейчас мы можем видеть, что степень ионизации, которая пропорциональна плотности соответствующего излучения, в случае полной компенсации процессов двух типов может быть представлена в согласии с теорией Шустера в виде:

$$\frac{n^+}{n} n_e = C \frac{t + 0.5}{t_1 + 1}, \quad (B)$$

где t — оптическая глубина данной точки оболочки и t_1 — полная оптическая толщина, в то время как в случае, когда каждый поглощенный „ультрафиолетовый“ квант дробится в кванты меньших частот и обратные процессы не имеют места, мы будем иметь:

$$\frac{n^+}{n} n_e = C' \cdot e^{-(\tau_1 - \tau)}. \quad (C)$$

В случае, когда оптическая толщина оболочки велика по сравнению с единицей, формулы (B) и (C) дают степени ионизации совершенно различного порядка. Возможно, что точная формула даст что-то промежуточное между (B) и (C). Но различие между (B) и (C) слишком велико, чтобы дать нам возможность даже приблизительной оценки рассматриваемой величины.

В настоящей статье выполнены некоторые расчеты, которые, возможно, могут служить для этой цели.

Условия стационарного состояния. Мы рассмотрим атом, в котором электрон имеет только три энергетических уровня $\epsilon_1 < \epsilon_2 < \epsilon_3$. Этим уровням соответствуют веса g_1, g_2, g_3 . Если плотность материи настолько мала, что мы можем пренебречь свехупругими столкновениями и каждый электронный переход сопровождается излучением соответствующего светового кванта, условия стационарного состояния могут быть записаны в виде:

$$\left. \begin{aligned} n_1 \{B_{12}\rho_{12} + B_{13}\rho_{13}\} &= n_2 \frac{g_1}{g_2} B_{12} (\sigma_{12} + \rho_{12}) + n_3 \frac{g_1}{g_3} B_{13} (\sigma_{13} + \rho_{13}) \\ n_1 B_{13}\rho_{13} + n_2 B_{23}\rho_{23} &= n_3 \left\{ \frac{g_1}{g_3} B_{13} (\sigma_{13} + \rho_{13}) + \frac{g_2}{g_3} B_{23} (\sigma_{23} + \rho_{23}) \right\} \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

где n_k — число атомов в k -том состоянии в кубическом сантиметре, ρ_{ik} — плотность излучения с частотой $\nu_{ik} = \frac{|\epsilon_i - \epsilon_k|}{h}$, B_{ik} — эйнштейновский коэффициент вероятности перехода с нижнего уровня i в более высокое состояние k .

Величины σ_{ik} связаны с ν_{ik} и универсальными постоянными посредством соотношения

$$\sigma_k = \frac{8\pi h \nu_{ik}^3}{c^3}. \quad (2)$$

Уравнения (1) заменяют уравнение лучистого равновесия в случае, когда условия термодинамического равновесия не имеют места.

Если мы предположим теперь, что третий энергетический уровень не является дискретным, а соответствует случаю, когда атом ионизован и электрон находится в свободном состоянии, то вместо эйнштейновских коэффициентов $B_{1 \rightarrow 3}$ и $B_{2 \rightarrow 3}$ вероятностей перехода из одного дискретного состояния в другое введем коэффициенты вероятности фотоэлектрических переходов, определяемые подходящим об-

разом. Так, полное число ионизаций атомов в 1 см^3 за промежуток времени dt равно:

$$(n_1 b_{1 \rightarrow 3} \rho_{13} + n_2 b_{2 \rightarrow 3} \rho_{23}) dt, \quad (3)$$

где ρ_{13} — удельная плотность излучения для минимальной частоты ν_{13} , необходимой для ионизации нормального атома, и ρ_{23} — удельная плотность для минимальной частоты ν_{23} , необходимой для ионизации возбужденного атома. Строго говоря, число ионизаций, например из первого состояния, зависит не только от удельной плотности в частоте ν_{13} , но также от удельных плотностей во всех частотах, удовлетворяющих неравенству $\nu > \nu_{13}$. Однако мы можем полагать, что *относительное* распределение энергии за частотой ν_{13} определяется одним параметром T („температура“), и принять, что выражение (3) справедливо при условии, что $b_{1 \rightarrow 3}$ и $b_{2 \rightarrow 3}$, зависят от этого параметра.

Число спонтанных рекомбинаций, происходящих в течение того же времени dt , дается выражением

$$n_3 (a_{3 \rightarrow 1} + a_{3 \rightarrow 2}) n_e dt, \quad (4)$$

где n_3 — число ионизованных атомов, а $n_3 a_{3 \rightarrow 1} dt$ (или $n_3 a_{3 \rightarrow 2} dt$) — вероятность такой рекомбинации свободного электрона с ионизованным атомом, которая образует атом в первом (или во втором) состоянии. Простые рассуждения, связанные с процессами ионизации, показывают, что между величинами a и b имеют место следующие соотношения:

$$a_{3 \rightarrow 1} = \frac{g_1 \tau_{13}}{g^+ G} b_{1 \rightarrow 3}; \quad a_{3 \rightarrow 2} = \frac{g_2 \tau_{23}}{g^+ G} b_{2 \rightarrow 3}, \quad (5)$$

где g^+ — вес нормального состояния ионизованного атома и

$$G = \frac{(2\pi m k T)^{3/2}}{h^3}. \quad (6)$$

Выражение (3) и (4) для числа переходов, а также соотношения (5) и (6) дают нам возможность написать в нашем случае условия равновесного состояния в виде:

$$\left. \begin{aligned} n_1 \{B_{12} \rho_{12} + b_{13} \rho_{13}\} &= n_2 \frac{g_1}{g_2} B_{12} (\tau_{12} + \rho_{12}) + \frac{g}{g^+ G} b_{13} (\tau_{13} + \rho_{13}) n_3 n_e \\ n_1 b_{13} \rho_{13} + n_2 b_{23} \rho_{23} &= \frac{n_3 n_e}{G} \left\{ \frac{g_1}{g^+} b_{13} (\tau_{13} + \rho_{13}) + \frac{g_2}{g^+} b_{23} (\tau_{23} + \rho_{23}) \right\} \end{aligned} \right\}. \quad (7)$$

Уравнения (7) могут быть приведены к виду (1), если мы в (7) обозначим:

$$\xi_3 = \frac{g^+ G}{n_e} \quad (8)$$

и напомним B_{13} и B_{23} вместо b_{13} и b_{23} . Единственное различие состоит в том, что коэффициенты B_{13} и B_{23} , также как и g_3 , зависят в нашем случае от параметра T . Следовательно, мы можем использовать уравнения (1) как отправной пункт наших расчетов.

В ходе нашего обсуждения мы будем считать, что B_{13} , B_{23} и g_3 постоянны, так как ширина интервала относительного изменения этих величин несомненно мала по сравнению с шириной интервала изменения других величин, входящих в наше исследование. Вследствие этого обстоятельства мы получим из нашей теории сведения не о *распределении* „ультрафиолетового“ излучения в спектре, а только о *приблизительном среднем значении его интенсивности*.

Приближенная форма решения уравнений стационарного состояния. Каждую удельную плотность ρ_{ik} мы можем записать в виде: $\rho_{ik} = \bar{\rho}_{ik} \cdot \sigma_{ik}$. Величины $\bar{\rho}_{ik}$ безразмерны. Согласно закону Планка, на поверхности звезды мы будем иметь:

$$\bar{\rho}_{ik} = \frac{1}{e^{\frac{h\nu_{ik}}{kT}} - 1}.$$

Предположим, что $\nu_{12} > 2kT$ и $\nu_{23} > 2kT^*$. Тогда величины $\bar{\rho}_{ik}$ даже на поверхности звезды малы по сравнению с единицей. На поверхности мы имеем приблизительно $\bar{\rho}_{13} = \bar{\rho}_{12} \cdot \bar{\rho}_{23}$ и, следовательно, если мы будем считать $\bar{\rho}_{12}$ и $\bar{\rho}_{23}$ малыми величинами первого порядка, $\bar{\rho}_{13}$ будет величиной второго порядка. В оболочке едва ли $\bar{\rho}_{ik}$ может достигать значений, во много раз превышающих поверхностные значения. Следовательно, мы всегда можем рассматривать их как малые величины, особенно $\bar{\rho}_{13}$ как малую величину второго порядка.

Уравнения переноса излучения для частот ν_{12} и ν_{13} , которые мы рассмотрим в следующем параграфе, содержат следующие два выражения:

$$\frac{\frac{g_1}{g_2} n_2}{n_1 - \frac{g_1}{g_2} n_2} \quad \text{и} \quad \frac{\frac{g_1}{g_3} n_3}{n_1 - \frac{g_1}{g_3} n_3}.$$

Эти отношения должны быть вычислены из уравнений (1). Соответствующие выражения довольно сложны. Но они достигают крайней простоты, если мы ограничиваемся членами первого и второго

* Эти условия выполняются почти во всех случаях, представляющих практический интерес.

порядка и пренебрежем более высокими членами. Выкладки слишком громоздки, чтобы быть приведенными здесь. В результате получаем:

$$\frac{\frac{g_1}{g_2} n_2}{n_1 - \frac{g_1}{g_2} n_2} = \bar{\rho}_{12} + \gamma (\bar{\rho}_{13} - \bar{\rho}_{12} \bar{\rho}_{23}), \quad (9)$$

$$\frac{\frac{g_1}{g_3} n_3}{n_1 - \frac{g_1}{g_3} n_3} = \bar{\rho}_{13} + \beta (\bar{\rho}_{12} \bar{\rho}_{23} - \bar{\rho}_{13}), \quad (10)$$

где постоянные γ и β имеют следующие значения:

$$\gamma = \frac{g_2 B_{13} B_{23} \sigma_{13} \sigma_{23}}{B_{12} \sigma_{12} [g_1 B_{13} \sigma_{13} + g_2 B_{23} \sigma_{23}]}, \quad (11)$$

$$\beta = \frac{g_2 B_{23} \sigma_{23}}{g_1 B_{13} \sigma_{13} + g_2 B_{23} \sigma_{23}} = \frac{B_{12} \sigma_{12}}{B_{13} \sigma_{13}} \gamma. \quad (12)$$

Приближение, которое мы применили, имеет очень простой физический смысл. Мы можем рассматривать атомные переходы типа $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ как простые процессы рассеяния квантов частоты ν_{12} нормальными атомами. Более сложные процессы типа $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ или $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ мы можем рассматривать как процессы столкновения нормального атома с двумя квантами $h\nu_{12}$ и $h\nu_{13}$. После столкновения такого рода мы можем иметь или один квант с частотой ν_{13} или снова два кванта $h\nu_{12}$ и $h\nu_{23}$. Могут иметь место также столкновения трех или более квантов с нормальным атомом. Таковы, например, процессы типа $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$, где два кванта $h\nu_{23}$ и квант $h\nu_{12}$ сталкиваются с нормальным атомом. Если, однако, плотность излучения для всех частот мала, мы можем пренебречь всеми столкновениями, в которых принимают участие более чем два кванта. Полагая далее, что плотность излучения частоты ν_{13} мала даже по сравнению с ρ_{12} и ρ_{23} , мы можем пренебречь также такими столкновениями с двумя квантами сразу, когда по крайней мере один из квантов имеет частоту ν_{13} . Таким образом мы снова получим уравнения (9) и (10).

С этой точки зрения „классическая“ теория монохроматического лучистого равновесия, которая, как подчеркивалось рядом авторов, применима лишь к резонансным линиям, является первым приближением, где принимаются во внимание только малые количества первого порядка. Это приближение является достаточным для объяснения в общих чертах образования линий поглощения, но не может дать объяснения существования линий излучения. Мы знаем (согласно

Росселанду), что такое объяснение невозможно, если не приняты во внимание три частоты и циклические переходы. Теория, представленная в настоящей статье, является вторым приближением, поскольку приняты во внимание члены второго порядка. Она имеет общий характер, в то время как теория, данная в предыдущих работах автора, применима только к специальным случаям, когда благодаря сильной дилуции излучения мы можем пренебречь членом $\rho_{12}\rho_{23}$ по сравнению с ρ_{13} . Настоящая теория, хотя она еще очень далека от точной, должна дать в каждом случае основные особенности явления эмиссионных линий.

Уравнения переноса. Для каждой частоты, подлежащей нашему рассмотрению, мы можем написать соответствующие уравнения переноса. Но это является излишним для частоты ν_{23} , так как мы можем предположить, что полная оптическая толщина оболочки в этой частоте наверняка мала по сравнению с единицей. Фактически эта частота соответствует ионизации из возбужденного состояния и поэтому оптическая толщина в ней будет того же порядка величины, что и оптическая толщина, являющаяся результатом *общей непрозрачности* оболочки, поскольку эта непрозрачность вызвана главным образом такими связанно-свободными переходами из возбужденных состояний. Оптическая толщина, обусловленная общей непрозрачностью, достигает величины порядка единицы только в фотосфере звезды. То же самое будет справедливо для частоты ν_{23} и оболочка будет прозрачна для этой частоты. Следовательно, мы можем прямо написать:

$$\rho_{23} = \frac{W}{e^{\frac{h\nu_{23}}{kT}} - 1}, \quad (13)$$

где W — коэффициент дилуции.

Уравнения переноса излучения для частот ν_{12} и ν_{13} , как известно [3], могут быть написаны в виде:

$$\frac{dI_{12}}{\Delta\nu_{12} \left(n_1 - \frac{g_1}{g_2} n_2 \right) \frac{B_{12}}{c} ds} = -I_{12} + \frac{g_1}{g_2} \frac{c\sigma_{12}}{4\pi} \frac{n_2}{n_1 - \frac{g_1}{g_2} n_2}, \quad (14)$$

$$\frac{dI_{13}}{\Delta\nu_{13} \left(n_1 - \frac{g_1}{g_3} n_3 \right) \frac{B_{13}}{c} ds} = -I_{13} + \frac{g_1}{g_3} \frac{c\sigma_{13}}{4\pi} \frac{n_3}{n_1 - \frac{g_1}{g_3} n_3}, \quad (15)$$

где I_{12} и I_{13} — удельные интенсивности излучения с частотами ν_{12} и ν_{13} , ds — элемент траектории луча, $\Delta\nu_{12}$ — ширина резонансной линии и $\Delta\nu_{13}$ — эффективная ширина соответствующей линии поглощения.

Если мы введем коэффициент поглощения α , рассчитанный на единицу объема, для частоты ν_{12}

$$\alpha = \frac{h\nu_{12}}{\Delta\nu_{12}} \left(n_1 - \frac{g_1}{g_2} n_2 \right) \frac{B_{12}}{c}, \quad (16)$$

мы получим:

$$\frac{dI_{12}}{ads} = -I_{12} + \frac{g_1}{g_2} \frac{c\sigma_{12}}{4\pi} \frac{n_2}{n_1 - \frac{g_1}{g_2} n_2}, \quad (17)$$

$$\frac{dI_{13}}{ads} = \frac{\nu_{13}\Delta\nu_{12}}{\nu_{12}\Delta\nu_{13}} \frac{n_1 - \frac{g_1}{g_3} n_3}{n_1 - \frac{g_1}{g_2} n_2} \frac{B_{13}}{B_{12}} \left\{ -I_{13} + \frac{g_1}{g_3} \frac{c\sigma_{13}}{4\pi} \frac{n_3}{n_1 - \frac{g_1}{g_3} n_3} \right\}. \quad (18)$$

Вместо интенсивностей I_{12} и I_{13} удобно ввести безразмерные величины Φ и Ψ :

$$I_{12} = \frac{c\sigma_{12}}{4\pi} \Phi; \quad I_{13} = \frac{c\sigma_{13}}{4\pi} \Psi. \quad (19)$$

Тогда уравнения (17) и (18) принимают простой вид:

$$\frac{d\Phi}{ads} = -\Phi + \frac{\frac{g_1}{g_2} n_2}{n_1 - \frac{g_1}{g_2} n_2}. \quad (20)$$

$$\frac{d\Psi}{ads} = \frac{\nu_{13}\Delta\nu_{12}}{\nu_{13}\Delta\nu_{13}} \frac{n_1 - \frac{g_1}{g_3} n_3}{n_1 - \frac{g_1}{g_2} n_2} \frac{B_{13}}{B_{12}} \left\{ -\Psi + \frac{\frac{g_1}{g_3} n_3}{n_1 - \frac{g_1}{g_3} n_3} \right\}. \quad (21)$$

Ясно, что между Φ и Ψ , с одной стороны, $\bar{\rho}_{12}$ и $\bar{\rho}_{13}$, с другой, имеют место следующие соотношения:

$$\bar{\rho}_{12} = \frac{1}{4\pi} \int \Phi d\omega; \quad \bar{\rho}_{13} = \frac{1}{4\pi} \int \Psi d\omega, \quad (22)$$

где $d\omega$ — есть элемент телесного угла и интегрирование распространяется на все направления.

Если $\bar{\rho}_{13}$ является малой величиной второго порядка, величина Ψ также будет второго порядка. Далее величина в скобках в уравнении (21) также будет второго порядка и в множителе, стоящем перед

этими скобками, мы свободно можем пренебречь малыми величинами первого порядка и написать:

$$\frac{n_1 - \frac{g_1}{g_3} n_3}{n_1 - \frac{g_1}{g_2} n_2} = 1.$$

Если мы далее обозначим:

$$\frac{\nu_{13} \Delta \nu_{12}}{\nu_{12} \Delta \nu_{13}} \frac{B_{13}}{B_{12}} = q,$$

то, принимая во внимание (9), (10) и (22), вместо (20) и (21) можем написать:

$$\frac{d\Phi}{\alpha ds} = -\Phi + \frac{1}{4\pi} \int [\Phi + \gamma (\Psi - \bar{\rho}_{23} \Phi)] d\omega, \quad (23)$$

$$\frac{d\Psi}{q \alpha ds} = -\Psi + \frac{1}{4\pi} \int [\Psi + \beta (\bar{\rho}_{23} \Phi - \Psi)] d\omega. \quad (24)$$

Остается теперь решить эти уравнения, в которых Φ и Ψ являются функциями координат и направления излучения. Однако конкретное решение может быть получено только в случае, когда заданы граничные условия для Φ и Ψ и функция координат α .

Геометрическая модель. Уравнения (23) и (24) носят общий характер и применимы ко всем проблемам атмосфер звезд с любым (постоянным или переменным) коэффициентом дилуции. Однако мы исключаем из дальнейшего рассмотрения звезды Вольф-Раие, поскольку высокая скорость истечения материи из них ведет к неравенству частот данной линии в различных частях атмосферы. Следовательно, в этом случае задача не может быть приведена к одномерной.

Кроме того, в приведенных ниже расчетах мы ограничимся случаями, когда коэффициент дилуции мал по сравнению с единицей. Предположим, например, что $W < \frac{1}{100}$. В этом случае мы можем без

опасений использовать метод приведения сферической задачи к плоской, развитый профессором Милном [4]. Единственное различие будет заключаться в том, что мы будем вычислять диффузное излучение и прямое излучение, приходящее от звезды, совместно, в то время как в работе Милна, так же как и в статьях автора, они рассматривались в отдельности. Это делает метод несколько менее точным. Но вычисления в этом случае не так сложны.

Введем оптическую глубину на расстоянии r от центра звезды:

$$\tau = \int_r^{r_2} a dr,$$

где r_2 — есть внешняя граница небулярной оболочки. Если далее r_1 есть расстояние внутренней границы от центра звезды, мы напишем:

$$\tau_1 = \int_{r_1}^{r_2} a dr.$$

τ_1 — есть полная оптическая толщина оболочки.

Используя приближение типа Шварцшильда-Шустера и вводя средние значения Φ и Φ' величины Φ для наружного и внутреннего направлений излучения и соответствующие средние значения Ψ и Ψ' величины Ψ , мы можем написать вместо (23) и (24) следующие приближенные уравнения:

$$\frac{1}{2} \frac{d\Phi}{d\tau} = \Phi - \frac{1}{2} \left\{ (\Phi + \Phi') + \gamma [\Psi + \Psi' - \bar{\rho}_{23} (\Phi + \Phi')] \right\}, \quad (25)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d\Phi'}{d\tau} = \frac{1}{2} \left\{ (\Phi + \Phi') + \gamma [\Psi + \Psi' - \bar{\rho}_{23} (\Phi + \Phi')] \right\} - \Phi', \quad (26)$$

$$\frac{1}{2q} \frac{d\Psi}{d\tau} = \Psi - \frac{1}{2} \left\{ (\Psi + \Psi') + \beta [\bar{\rho}_{23} (\Phi + \Phi') - (\Psi + \Psi')] \right\}, \quad (27)$$

$$\frac{1}{2q} \frac{d\Psi'}{d\tau} = \frac{1}{2} \left\{ (\Psi + \Psi') + \beta [\bar{\rho}_{23} (\Phi + \Phi') - (\Psi + \Psi')] \right\} - \Psi'. \quad (28)$$

На внешней границе мы имеем следующие условия:

$$\Phi'(0) = \Psi'(0) = 0 \quad (D)$$

На внутренней границе для резонансной частоты мы имеем условие равенства нулю результирующего потока,

$$\Phi(\tau_1) - \Phi'(\tau_1) = 0, \quad (E)$$

поскольку мы можем пренебречь прямым излучением звезды в этой частоте. Для „ультрафиолетового“ излучения на этой границе мы имеем:

$$\Psi(\tau_1) - \Psi'(\tau_1) = \Psi_0 \quad (F)$$

благодаря тому, что $\Psi(\tau_1)$ содержит прямое излучение звезды. Постоянная Ψ_0 связана с количеством πS ультрафиолетовой энергии, падающей на каждый квадратный сантиметр внутренней поверхности, посредством соотношения:

$$\Psi_0 = \frac{1}{2} \frac{4\pi S}{c\tau_{13}} = 2 W(\bar{\rho}_{13})_{\text{поверх.}}$$

Теперь остается решить уравнения (25), (26), (27) и (28), принимая во внимание граничные условия (D), (E) и (F).

Решение уравнений. Складывая (25) с (26) и (27) с (28), получаем:

$$\frac{1}{2} \frac{d(\Phi + \Phi')}{d\tau} = \Phi - \Phi', \quad (29)$$

$$\frac{1}{2q} \frac{d(\Psi + \Psi')}{d\tau} = \Psi - \Psi'. \quad (30)$$

Вычитая (26) из (25) и (28) из (27), имеем:

$$\frac{1}{2} \frac{d(\Phi - \Phi')}{d\tau} = -\gamma [\Psi + \Psi' - \bar{\rho}_{23}(\Phi + \Phi')], \quad (31)$$

$$\frac{1}{2q} \frac{d(\Psi - \Psi')}{d\tau} = -\beta [\bar{\rho}_{23}(\Phi + \Phi') - (\Psi + \Psi')]. \quad (32)$$

Дифференцируя (29) и (30) и сравнивая с (31) и (32), мы получаем следующую систему двух уравнений второго порядка для $\Phi + \Phi'$ и $\Psi + \Psi'$:

$$\frac{1}{4} \frac{d^2(\Phi + \Phi')}{d\tau^2} = -\gamma [\Psi + \Psi' - \bar{\rho}_{23}(\Phi + \Phi')], \quad (33)$$

$$\frac{1}{4q^2} \frac{d^2(\Psi + \Psi')}{d\tau^2} = \beta [\bar{\rho}_{23}(\Phi + \Phi') - (\Psi + \Psi')]. \quad (34)$$

В модели Милна линейная толщина небулярной оболочки предполагается малой по сравнению с расстоянием от центра. Поэтому в согласии с этой моделью следует полагать $W = \text{const}$ или, согласно (13), $\bar{\rho}_{23} = \text{const}$.

В этом случае общее решение системы уравнений (33) и (34) имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \Phi + \Phi' &= C_1 + C_2\tau + C_3e^{\lambda\tau} + C_4e^{-\lambda\tau} \\ \Psi + \Psi' &= \bar{\rho}_{23}(C_1 + C_2\tau) - \frac{q^{2\beta}}{\gamma}(C_3e^{\lambda\tau} + C_4e^{-\lambda\tau}) \end{aligned} \right\}, \quad (35)$$

где

$$\lambda = 2\sqrt{\gamma\bar{\rho}_{23} + \beta q^2}.$$

Используя (29) и (30), мы далее получаем:

$$\left. \begin{aligned} \Phi - \Phi' &= \frac{C_2}{2} + \frac{C_3\lambda}{2}e^{\lambda\tau} - \frac{C_4\lambda}{2}e^{-\lambda\tau} \\ \Psi - \Psi' &= \frac{\bar{\rho}_{23}}{2q}C_2 - \frac{q^\beta}{2\gamma}\lambda C_3e^{\lambda\tau} + \frac{q^\beta}{2\gamma}\lambda C_4e^{-\lambda\tau} \end{aligned} \right\}. \quad (36)$$

Сравнивая (36) с (E) и (F), имеем:

$$C_2 + C_3\lambda e^{\lambda\tau_1} - C_4\lambda e^{-\lambda\tau_1} = 0, \quad (37)$$

$$\frac{\bar{\rho}_{23}}{2q}C_2 - \frac{q^\beta}{2\gamma}\lambda C_3e^{\lambda\tau_1} + \frac{q^\beta}{2\gamma}\lambda C_4e^{-\lambda\tau_1} = \Psi_0. \quad (38)$$

Из (35) и (36) мы далее имеем:

$$2\Phi' = \left(C_1 - \frac{C_2}{2}\right) + C_2\tau + C_3\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)e^{\lambda\tau} + C_4\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)e^{-\lambda\tau}, \quad (39)$$

$$2\Psi' = \left(C_1 - \frac{C_2}{2q}\right)\bar{\rho}_{23} + C_2\bar{\rho}_{23}\tau - \frac{q^{2\beta}}{\gamma}\left[\left(1 - \frac{\lambda}{2q}\right)C_3e^{\lambda\tau} + \left(1 + \frac{\lambda}{2q}\right)C_4e^{-\lambda\tau}\right]. \quad (40)$$

Следовательно, граничные условия (D) могут быть записаны в виде:

$$\left(C_1 - \frac{C_2}{2}\right) + C_3\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) + C_4\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) = 0, \quad (41)$$

$$\left(C_1 - \frac{C_2}{2q}\right)\bar{\rho}_{23} - \frac{q^{2\beta}}{\gamma}\left[\left(1 - \frac{\lambda}{2q}\right)C_3 + \left(1 + \frac{\lambda}{2q}\right)C_4\right] = 0. \quad (42)$$

Из условий (37), (38), (41) и (42) мы можем определить коэффициенты C_1 , C_2 , C_3 и C_4 . Имеем:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{q\Psi_0}{\rho_{23}} \frac{1}{1 + \frac{q^{2\beta}}{\gamma\rho_{23}}} \\
 &= \frac{\left[\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) e^{-\lambda\tau_1} + \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) e^{\lambda\tau_1} \right] \frac{(q-1)\Psi_0}{\rho_{23} \left(1 + \frac{q^{2\beta}}{\gamma\rho_{23}}\right)}}{\left[\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) + \frac{q^{2\beta}}{\gamma\rho_{23}} \left(1 + \frac{\lambda}{2q}\right) \right] e^{\lambda\tau_1} + \left[\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) + \frac{q^{2\beta}}{\gamma\rho_{23}} \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) \right] e^{-\lambda\tau_1}} \\
 &= \frac{\left\{ \left[\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) + \frac{q^{2\beta}}{\gamma\rho_{23}} \left(1 + \frac{\lambda}{2q}\right) \right] \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) - \left[\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) + \frac{q^{2\beta}}{\gamma\rho_{23}} \left(1 - \frac{\lambda}{2q}\right) \right] \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) \right\}}{\left[\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) + \frac{q^{2\beta}}{\gamma\rho_{23}} \left(1 + \frac{\lambda}{2q}\right) \right] e^{\lambda\tau_1} + \left[\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) + \frac{q^{2\beta}}{\gamma\rho_{23}} \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) \right] e^{-\lambda\tau_1}} \times \\
 &\quad \times \frac{2q\Psi_0}{\gamma\rho_{23}} \frac{1}{1 + \frac{q^{2\beta}}{\gamma\rho_{23}}} \\
 C_2 &= \frac{2q\Psi_0}{\rho_{23}} \frac{1}{1 + \frac{q^{2\beta}}{\gamma\rho_{23}}} \\
 C_3 &= \frac{\frac{(1-q)\Psi_0}{\rho_{23} \left(1 + \frac{q^{2\beta}}{\gamma\rho_{23}}\right)} e^{-\lambda\tau_1} + \left[\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) + \frac{q^{2\beta}}{\gamma\rho_{23}} \left(1 + \frac{\lambda}{2q}\right) \right] \frac{2q\Psi_0}{\gamma\rho_{23}} \frac{1}{1 + \frac{q^{2\beta}}{\gamma\rho_{23}}}}{\left[\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) + \frac{q^{2\beta}}{\gamma\rho_{23}} \left(1 + \frac{\lambda}{2q}\right) \right] e^{\lambda\tau_1} + \left[\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) + \frac{q^{2\beta}}{\gamma\rho_{23}} \left(1 - \frac{\lambda}{2q}\right) \right] e^{-\lambda\tau_1}} \\
 C_4 &= \frac{\frac{(1-q)\Psi_0}{\rho_{23} \left(1 + \frac{q^{2\beta}}{\gamma\rho_{23}}\right)} e^{\lambda\tau_1} + \left[\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) + \frac{q^{2\beta}}{\gamma\rho_{23}} \left(1 - \frac{\lambda}{2q}\right) \right] \frac{2q\Psi_0}{\gamma\rho_{23}} \frac{1}{1 + \frac{q^{2\beta}}{\gamma\rho_{23}}}}{\left[\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) + \frac{q^{2\beta}}{\gamma\rho_{23}} \left(1 + \frac{\lambda}{2q}\right) \right] e^{\lambda\tau_1} + \left[\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) + \frac{q^{2\beta}}{\gamma\rho_{23}} \left(1 - \frac{\lambda}{2q}\right) \right] e^{-\lambda\tau_1}}
 \end{aligned}
 \tag{43}$$

Ионизация в оболочке. Нашей целью является нахождение степени ионизации в оболочке. Если оболочка прозрачна для излучения в частоте ν_{13} , ионизация определяется согласно простым формулам, выведенным Эддингтоном и Росселандом. Однако наибольший интерес представляет случай, когда оболочка непрозрачна для этого излучения, т. е. оптическая толщина в частоте ν_{13} , которая равна $q\tau_1$,

велика по сравнению с единицей. Таким образом $\tau_1 \gg \frac{1}{q}$. Обычно $\frac{1}{q}$ порядка 10^4 . Следовательно, если диллюция излучения не так велика, как в планетарных туманностях, величина $e^{-\lambda\tau_1}$ очень мала, а $e^{\lambda\tau_1}$ очень велика.

Это обстоятельство дает возможность упрощения выражений для C_3 и C_4 путем пренебрежения малыми величинами. Таким образом, из приведенных выше формул мы получаем следующие приближенные значения:

$$C_3 = \frac{2q\Psi_0}{\lambda\bar{\rho}_{23}} \frac{1}{1 + \frac{q^2\beta}{\gamma\bar{\rho}_{23}}} e^{-\lambda\tau_1}; \quad C_4 = - \frac{\frac{(1-q)\Psi_0}{\bar{\rho}_{23} \left(1 + \frac{q^2\beta}{\lambda\bar{\rho}_{23}}\right)}}{\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) + \frac{q^2\beta}{\gamma\bar{\rho}_{23}} \left(1 + \frac{\lambda}{2q}\right)}. \quad (44)$$

Теперь ясно, что выражение

$$C_3 e^{\lambda\tau} + C_4 e^{-\lambda\tau}$$

всегда очень мало, исключая области около $\tau = 0$ и $\tau = \tau_1$. Во всех других частях оболочки, практически во всей оболочке, пренебрегая этими членами, мы можем вместо (35) написать:

$$\begin{aligned} \Phi + \Phi' &= C_1 + C_2\tau \\ \Psi + \Psi' &= \bar{\rho}_{23} (C_1 + C_2\tau). \end{aligned} \quad (45)$$

Рассмотрим случай, когда диллюция излучения не столь велика и следовательно $\bar{\rho}_{23} \gg q^2$.* В этом случае мы просто имеем:

$$C_2 = \frac{2q\Psi_0}{\bar{\rho}_{23}}, \quad (46)$$

поскольку β и γ имеют приблизительно одинаковый порядок величины.

Принимая во внимание, что λ мало по сравнению с единицей, мы имеем также:

$$C_1 \simeq \frac{\Psi_0}{\bar{\rho}_{23}}. \quad (47)$$

* Мы имеем $\bar{\rho}_{23} = W(\bar{\rho}_{23})_{\text{поверх}}$. Далее, $q \simeq 10^{-4}$. Если $(\bar{\rho}_{23})_{\text{поверх}}$ порядка 10^{-2} , неравенство в тексте будет удовлетворено при $W \gg 10^{-6}$. Это безусловно не удовлетворится в случае планетарных туманностей.

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \Phi + \Phi' &\cong \frac{2\Psi_0}{\rho_{23}} \left(q\tau + \frac{1}{2} \right) \\ \Psi + \Psi' &\cong 2\Psi_0 \left(q\tau + \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Мы можем теперь получить приближенные значения $\bar{\rho}_{12}$ и $\bar{\rho}_{13}$. Имеем:

$$\bar{\rho}_{12} = \frac{1}{2} (\Phi + \Phi'); \quad \bar{\rho}_{13} = \frac{1}{2} (\Psi + \Psi')$$

и $\tau = \frac{t}{q}$, где t — оптическая толщина в частоте ν_{13} . Таким образом:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\rho}_{12} &\cong \frac{\Psi_0}{\rho_{23}} \left(t + \frac{1}{2} \right) \\ \bar{\rho}_{13} &\cong \Psi_0 \left(t + \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Если теперь вспомним, что

$$\Psi_0 = 2W (\bar{\rho}_{13})_{\text{поверх.}}; \quad \bar{\rho}_{23} = W (\bar{\rho}_{23})_{\text{поверх.}}; \quad (\bar{\rho}_{13})_{\text{поверх.}} = (\bar{\rho}_{12})_{\text{поверх.}} (\bar{\rho}_{23})_{\text{поверх.}},$$

мы можем вместо (49) написать:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\rho}_{12} &\cong 2 (\bar{\rho}_{12})_{\text{поверх.}} \left(t + \frac{1}{2} \right) \\ \bar{\rho}_{13} &\cong 2W (\bar{\rho}_{13})_{\text{поверх.}} \left(t + \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Мы видим теперь, что если наши предположения выполняются, плотность излучения в резонансной частоте в оболочке больше, чем на поверхности звезды. Однако в дальнейшем необходимо проверить, в какой мере это важное заключение остается правильным, если принимаются во внимание неупругие столкновения, происходящие в оболочке.

Подставляя (50) в (10), мы находим степень ионизации:

$$\frac{\frac{g_1}{g_3} n_3}{n_1 - \frac{g_1}{g_3} n_3} \cong \bar{\rho}_{13} \cong W (\bar{\rho}_{13})_{\text{поверх.}} (2t + 1);$$

или приближенно

$$\frac{g_1}{g_3} \frac{n_3}{n_1} \cong W (\bar{\rho}_{13})_{\text{поверх.}} (2t + 1). \quad (51)$$

Согласно (8) и (6):

$$g_3 = \frac{g^+}{n_e} \frac{(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3}.$$

Далее, приближенно

$$(\rho_{13})_{\text{поверх.}} = e^{-\frac{h\nu_{13}}{kT}}.$$

Вводя эти выражения в (51), мы получаем окончательно:

$$\frac{n_3}{n_1} n_e = \frac{g^+}{g_1} (2t + 1) W \frac{(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3} e^{-\frac{h\nu_{13}}{kT}}. \quad (52)$$

Мы заключаем, что ионизация очень медленно убывает в наружном направлении.

Астрономическая обсерватория
университета, Ленинград
Декабрь 1934 года

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Амбарцумян, МН, **93**, 50, 1932.
2. В. А. Амбарцумян, Бюллетень Пулк. Обс., **13**, 3, 1933.
3. Е. А. Мілне, МН, **88**, 493, 1928.
4. Е. А. Мілне, Z. f. Ap. **1**, 98, 1930.

Примечание. При выводе формулы (52) принята во внимание ионизация из возбужденного состояния, существенно зависящая от населенности этого состояния, а значит и от плотности излучения в линии, определяющей эту населенность. Однако при этом не учтен ряд факторов, сильно влияющих на плотность излучения в линии (см. примечание к статье „Лучистое равновесие планетарной туманности“). При учете этих факторов формула ионизации сильно меняется.

О ЛУЧЕВОМ РАВНОВЕСИИ ВОДОРОДНЫХ ОБОЛОЧЕК, ОКРУЖАЮЩИХ ЗВЕЗДЫ*

Проблема лучевого равновесия в газовых оболочках, окружающих звезды (например, в протяженных хромосферах, в расширяющихся оболочках вокруг Новых звезд, в планетарных туманностях), представляет большие трудности по той причине, что в этих оболочках нельзя и приближенно предполагать наличие локального термодинамического равновесия. Более того, основные явления, характерные для этих оболочек (например, образование эмиссионных линий), вызваны как раз нарушением термодинамического равновесия.

В случае, когда среда состоит из атомов одного сорта, обладающих k различными уровнями энергии, задача о лучевом равновесии сводится вообще к решению уравнений переноса вида:

$$\frac{dI_{ii}}{ds} = -\frac{h\nu_{ii}}{c\Delta\nu_{ii}} (B_{i-1}n_i - B_{i \rightarrow i}n_i) I_{ii} + \frac{A_{l \rightarrow i} h\nu_{ii}}{4\pi\Delta\nu_{ii}} \cdot n_l \quad (1)$$

$$(i = 1, 2, \dots, l-1; l = 2, 3, \dots, k),$$

где i и l — номера нижнего и верхнего уровней для данной спектральной линии, I_{ii} — интенсивность излучения в этой линии, ν_{ii} — ее частота, $\Delta\nu_{ii}$ — ее ширина, B_{i-1} , $B_{i \rightarrow i}$, $A_{l \rightarrow i}$ — эйнштейновские коэффициенты вероятностей соответствующих переходов, c — скорость света, h — постоянная Планка и n_i — число атомов в единице объема на i -том уровне.

К этим $\frac{k(k-1)}{2}$ уравнениям переноса присоединяются $k-1$ условий стационарности для чисел n_i :

$$0 = \frac{dn_i}{dt} = \sum_{l=i+1}^k \{n_l (A_{l \rightarrow i} + B_{l \rightarrow i} \rho_{ll}) - n_i B_{i \rightarrow l} \rho_{ll}\} - \sum_{l=1}^{i-1} \{n_i (A_{i \rightarrow l} + B_{i \rightarrow l} \rho_{ll}) - n_l B_{l \rightarrow i} \rho_{ll}\}, \quad (2)$$

* Уч. Зап. ЛГУ, № 31, 5, 1939.

где

$$\rho_{il} = \frac{1}{c} \int I d\omega \quad (3)$$

представляет плотность излучения в частоте ν_{il} .

С другой стороны, мы имеем:

$$\sum_{i=1}^k n_i = n, \quad (4)$$

где n (концентрация атомов на всех k — уровнях) представляет собой функцию координат, считающуюся в теории лучевого равновесия заданной. Уравнения (1), (2) и (4) вместе составляют систему $\frac{k(k+1)}{2}$

уравнений для $\frac{k(k+1)}{2}$ неизвестных функций I_{il} и n_i .

Правда, мы можем свести дело к решению системы одних лишь уравнений переноса, внося в уравнение (1) из уравнений (2) и (4) выражения n_i через ρ_{il} , т. е. $\int I_{il} d\omega$. Совокупность уравнений переноса превратится тогда в систему $\frac{k(k-1)}{2}$ нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. Гигантская трудность общего или численного решения этой системы очевидна; поэтому до сих пор разобраны лишь некоторые простейшие случаи.

Так, например, теория рассеяния в звездной атмосфере Шварцшильда-Шустера (монохроматическое лучевое равновесие) представляет собой решение проблемы для $k=2$. Это решение оказалось весьма полезным для теории линий поглощения. Однако в случае эмиссионных линий для построения теории, хотя бы и качественной, необходимо рассматривать минимум три разных уровня. Но и для случая трех уровней задача может быть решена до конца лишь при наличии некоторых упрощающих условий. Так, например, автор показал, что сильная разреженность излучения в планетарных туманностях позволяет свести задачу их лучевого равновесия к такой проблеме трех уровней, в которой уравнение для поля излучения в одной из частот L_c решается независимо от других полей. Однако в другой работе было показано, что уже к туманным оболочкам малого радиуса, окружающим звезды с эмиссионными линиями, где разреженность излучения не так сильна, как в планетарных туманностях, разработанная для последних теория неприменима. Поэтому для каждо-

го случая приходится применять свои приближенные приемы решения задачи.

Между тем мы увидим ниже, что хотя решить рассматриваемую проблему k -состояний до конца в общем виде и не представляется сейчас возможным, все же в самом общем случае можно установить ряд соотношений, могущих быть названными формулами сохранения потоков определенных квантов. В случае наличия симметрии какого-либо типа (плоско-параллельные слои или сферическая симметрия) эти соотношения приводят непосредственно к $k-1$ интегралам системы) (1). К выводу этих соотношений мы и перейдем.

Сохранение числа квантов каждой серии

Все эти соотношения носят чрезвычайно простой характер и могут быть получены почти без всяких алгебраических выкладок, из одних физических соображений. Для простоты остановимся на водородных атомах.

Для того чтобы, получить первое соотношение, используем первое из соотношений стационарности (2). Оно имеет вид при $i = 1$:

$$\sum_{l=2}^{\infty} n_l (A_{l-1} + B_{l-1}\rho_{1l}) - \sum_{l=2}^{\infty} n_l B_{1 \rightarrow l}\rho_{1l} = 0;$$

в знак суммы включены ионизации и соответственно рекомбинации.

Выражая неизменность числа атомов в основном состоянии, соотношение это в то же время указывает, что число квантов, излучаемых в единицу времени в единице объема в частотах Лаймановской серии, равно числу поглощаемых квантов в тех же частотах. Поэтому должно соблюдаться правило сохранения Лаймановских квантов, заключающееся в том, что хотя кванты той или иной линии Лаймановской серии могут замещаться вообще квантами других линий той же серии, но общее число Лаймановских квантов не меняется.

Точно так же второе из уравнений (2),

$$\sum_{l=3}^k n_l (A_{l-2} + B_{l-2}\rho_{2l}) - \sum_{l=3}^k n_l B_{2 \rightarrow l}\rho_{2l} = n_2 (A_{2 \rightarrow 1} + B_{2 \rightarrow 1}\rho_{12}) - n_1 B_{1 \rightarrow 2}\rho_{12},$$

указывает на то, что превышение числа квантов, излучаемых в единице объема во всех линиях Бальмеровской серии, над числом квантов, поглощаемых во всех линиях той же серии, равно превышению числа квантов, излучаемых в линии L_α над числом квантов, поглощаемых в этой линии. Иными словами, в результате этих процессов

излучения и поглощения разность между числом квантов во всех линиях Бальмеровской серии и числом квантов в линии L_α остается неизменной.

Далее, таким же образом убеждаемся, что в результате рассматриваемых процессов излучения и поглощения разность между числом квантов во всех линиях Пашеновской серии (включая и континуум за границей серии) и числом квантов в линиях H_α и L_β вместе остается неизменной.

Для удобства формулировки введено понятие об алгебраической сумме чисел квантов в какой-либо серии (в единице объема, во всем объеме и т. д.).

Под *алгебраической суммой* чисел квантов в данной серии мы будем понимать сумму чисел квантов во всех линиях этой серии (включая континуум за границей серии), взятых с положительным знаком, и чисел квантов во всех линиях, соответствующих переходам из основного состояния этой серии в более низкие, взятых с отрицательным знаком.

Тогда общий результат можно сформулировать так: *алгебраическая сумма чисел квантов каждой спектральной серии не меняется от процессов излучения и поглощения*. Соблюдая то же правило суммирования, мы можем также сказать, что алгебраическая сумма чисел квантов, поглощенных в данной серии в единице объема, равняется алгебраической сумме излученных квантов. Таким образом, по отношению к *алгебраической сумме чисел квантов* каждой серии в отдельности имеет место лучевое равновесие.

Уравнения „непрерывности“

Для каждой линии мы можем образовать вектор потока \vec{H}_ν с компонентами

$$H_x = \Delta\nu \int I_\nu \cos \alpha d\omega; \quad H_y = \Delta\nu \int I_\nu \cos \beta d\omega; \quad H_z = \Delta\nu \int I_\nu \cos \gamma d\omega,$$

где α , β и γ углы, образованные направлением излучения с осями x , y , z соответственно.

Разделив вектор \vec{H}_ν на энергию кванта $h\nu$, мы получим выражение для вектора, характеризующего *поток числа квантов* в данной линии. Произведем алгебраическое сложение векторов потоков чисел, относящихся к i -той серии (Лаймановская серия считается первой):

$$\vec{N}_i = \sum \frac{\vec{H}_\nu}{h\nu}. \quad (5)$$

Штрих при знаке суммы означает, что суммирование ведется по линиям i -той серии и что \vec{H}_ν для частот, соответствующих переходам из основного состояния для данной серии в более низкие, взяты с обратным знаком.

Величина \vec{N}_i может быть названа алгебраической суммой потоков чисел квантов по линиям i -той серии. Поскольку от процессов излучения и поглощения алгебраическая сумма концентраций световых квантов в данной серии не меняется, то расхождение вектора \vec{N}_i должно исчезать:

$$\operatorname{div} \vec{N}_i = \operatorname{div} \sum' \frac{\vec{H}_\nu}{h\nu} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, k-1). \quad (6)$$

Эти $k-1$ уравнений могут быть названы уравнениями непрерывности для поля излучения.

Уравнения (6), к которым мы пришли из физических соображений, легко могут быть проверены. Для этого стоит лишь написать:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{N}_i &= \operatorname{div} \sum' \frac{\vec{H}_\nu}{h\nu} = \sum' \frac{1}{h\nu} \operatorname{div} \vec{H}_\nu = \\ &= \sum' \frac{\Delta\nu}{h\nu} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \int I_\nu \cos \alpha d\omega + \frac{\partial}{\partial y} \int I_\nu \cos \beta d\omega + \frac{\partial}{\partial z} \int I_\nu \cos \gamma d\omega \right\} = \\ &= \sum' \frac{\Delta\nu}{h\nu} \int \left\{ \frac{\partial I_\nu}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial I_\nu}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial I_\nu}{\partial z} \cos \gamma \right\} d\omega = \sum' \frac{\Delta\nu}{h\nu} \int \frac{\partial I_\nu}{\partial s} d\omega \end{aligned}$$

и, подставив в правую часть значение $\frac{dI_\nu}{ds}$ из уравнения (1), принять во внимание уравнение (2).

Плоско-параллельные слои

В случае плоско-параллельных слоев уравнения (6) допускают интегралы

$$\vec{N} = \vec{\alpha}_i, \quad (7)$$

где $\vec{\alpha}_i$ — постоянные векторы, направленные перпендикулярно к сло-

ям. Обозначая величину вектора той же буквой, но без черты, мы имеем поэтому:

$$\sum' \frac{H_{\nu}}{h\nu} = \alpha_i \quad (i=1, 2, 3, \dots, k-1), \quad (8)$$

т. е. $k-1$ интегралов алгебраической суммы потоков чисел квантов в каждой серии.

В качестве примеров можно привести первые три серии:

- 1) поток числа всех Лаймановских квантов постоянен;
- 2) поток числа всех Бальмеровских квантов минус поток числа квантов в линии L_{α} постоянен, и
- 3) поток числа всех Пашеновских квантов минус потоки чисел квантов в линиях H_{α} и L_{β} постоянен.

Некоторые применения полученных интегралов проблемы к конкретным объектам будут даны в другой работе*. Здесь же мы укажем лишь на то, что полученные интегралы открывают путь к нахождению дальнейших интегралов в приближенном виде.

В самом деле, в случае плоско-параллельных слоев $ds = \sec \alpha dx$. Подставив это в уравнение (1), помножив обе части на $\cos \alpha$ и проинтегрировав по всем телесным углам, получим:

$$\frac{d}{dx} \int I_{il} \cos^2 \alpha d\omega = - \frac{h\nu_{il}}{c\Delta\nu_{il}} (B_{i \rightarrow l} - B_{l \rightarrow i} n_l) \int I_{il} \cos \alpha dz.$$

Положим $i=1$, т. е. возьмем частный случай линий Лаймановской серии. Тогда, пренебрегая эйнштейновским отрицательным поглощением, а также внося для потока его обозначение

$$\Delta\nu \int I_{il} \cos \alpha dz = H_{il},$$

мы получим:

$$\frac{d}{dx} \int I_{1l} \cos^2 \alpha d\omega = - \frac{h\nu_{1l}}{c(\Delta\nu_{1l})^2} B_{1l} n_1 H_{1l}$$

или

$$\frac{c(\Delta\nu_{1l})^2}{(h\nu_{1l})^2} \frac{1}{B_{1l}} \frac{d}{dx} \int I_{1l} \cos^2 \alpha d\omega = - \frac{n_1 H_{1l}}{h\nu_{1l}}.$$

Суммируя по всем линиям Лаймановской серии и интегрируя по x , получим:

$$\sum_l \frac{c(\Delta\nu_{1l})^2}{(h\nu_{1l})^2} \frac{1}{B_{1l}} \int I_{1l} \cos^2 \alpha d\omega = \left(\sum_l \frac{H_{1l}}{h\nu_{1l}} \right) \cdot \tau,$$

* Это не сделано.—Ред.

где

$$\tau = \int_x^{\infty} n_1 dx$$

есть число атомов в первом состоянии на 1 см^2 над уровнем x . Вводя приближение Эддингтона,

$$\int I_{1l} \cos^2 \alpha d\omega = \frac{1}{3} \int I_{1l} d\omega = \frac{1}{3} I_{1l},$$

мы получаем:

$$\frac{1}{3} \sum_l \frac{c \Delta \nu_{1l}}{(h \nu_{1l})^2} \frac{1}{B_{1l}} I = \left(\sum_l \frac{H_{1l}}{h \nu_{1l}} \right) \tau,$$

т. е. некоторую взвешенную сумму плотностей излучения в данной серии, как функцию оптической глубины.

Критические замечания

Строго говоря, полученные результаты справедливы лишь в том случае, когда частоты различных линий не перекрываются. В случае дискретных линий дело так и обстоит. Но для непрерывных спектров за границей серии мы почти всегда имеем такое перекрытие. Так, например, в случае водорода непрерывный спектр за границей Лаймановской серии мы относим к Лаймановской серии. Между тем, частоты этого непрерывного спектра могут поглощаться вообще атомами водорода, находящимися, например, на втором уровне. Строго говоря, это приводит к обмену квантами разных серий и поэтому к нарушению закона сохранения потока числа квантов в каждой серии.

Однако этот обмен квантами практически должен мало сказаться на первых двух-трех сериях, представляющих, как правило, наибольший теоретический интерес. В самом деле, вероятность поглощения, например, кванта с частотой, превосходящей частоту границы Лаймановской серии, атомом водорода, находящимся во втором состоянии, настолько мала, что мы можем спокойно считать Бальмеровский континуум прерывающимся у границы Лаймановской серии, а Пашеновский континуум—прерывающимся у границы Бальмеровской серии. Тогда каждая частота будет относиться к вполне определенной серии.

Для более высоких серий такое разделение может приводить уже к заметной ошибке*.

Примечание. За двадцать лет, прошедших после опубликования этой статьи, решение рассматриваемой в ней проблемы почти не продвинулось вперед, что объясняется, по-видимому, большой сложностью проблемы. Однако в случае движущейся среды проблема существенно упрощается. Это связано с тем, что при движении среды с градиентом скорости она становится как бы частично прозрачной для излучения в линиях вследствие эффекта Доплера. В указанном случае для каждого места среды можно составить алгебраические уравнения стационарности, обобщающие уравнения Силлие. Путем решения этих уравнений определяются числа атомов в различных состояниях и интенсивности эмиссионных линий.

* После сдачи в печать настоящей статьи появилось исследование Непуеу'а (Astroph. Journal, **86**, 133, 1938), в котором сделаны те же выводы об интегралах потока.

ЗВЕЗДНАЯ АСТРОНОМИЯ

Письмо редакторам „Observatory“

О СРЕДНЕЙ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ ЖИЗНИ
ПЕРЕМЕННЫХ ТИПА СКОПЛЕНИЙ
(КОРОТКОПЕРИОДИЧЕСКИХ ЦЕФЕИД)*

Господа,

Согласно теории вращения Галактики, развитой Оортом и Линдبلادом, галактическая система состоит из нескольких, кинематически независимых подсистем. Это обстоятельство имеет важные последствия для космогонии, и цель настоящей заметки обратить внимание на одно из них.

Каждая подсистема определяется соответствующей функцией распределения в фазовом пространстве. Если звезды некоторого типа принадлежат к данной подсистеме A , то они останутся в A , несмотря на все изменения, которые могут произойти в их физическом строении в течение времени, при условии только, что массы остаются неизменными.

В настоящее время в Галактике существует подсистема, непохожая на какую-либо другую. Это—система переменных типа скоплений. Мы уверены, что массы этих звезд остаются практически неизменными в промежутке времени порядка 10^9 лет. Следовательно, если продолжительность переменности („средняя продолжительность жизни“ этих переменных) мала по сравнению с этой цифрой, то рассматриваемая подсистема будет содержать большую пропорцию звезд, которые будут со временем становиться переменными типа скоплений, также как и звезд, которые уже находились когда-то в стадии этих переменных. Согласно соотношению масса-светимость звезды обоих родов будут иметь одинаковую с переменными типа скоплений светимость. Чем меньше средняя продолжительность жизни переменных,

* On the mean life-time of the Cluster Type Variables. Observatory, 58, № 732, 152, 1935.

тем меньше будет пропорция переменных типа скоплений в их собственной подсистеме.

Однако, согласно существующим данным, число неперемennых гигантов в этой подсистеме не может быть более высокого порядка величины, чем число переменных.

Насколько мы можем видеть, остаются, следовательно, две возможности: (1) Средняя продолжительность жизни порядка 10^9 лет или больше. (2) Продолжительность жизни короче, чем 10^9 лет, однако звезды, которые становятся переменными типа скоплений, и звезды, в которые превращаются переменные типа скоплений, нарушают соотношение масса-светимость и являются некоторого рода „белыми карликами“.

Кажется, что вторая возможность мало вероятна.

Преданный Вам
В. Амбарцумян

Астрономическая обсерватория
университета, Ленинград
4 февраля 1935

Примечание. Основная идея этой заметки, устанавливающая, что эволюционные связи следует искать путем сравнения звезд, составляющих в пространственно-кинематическом отношении подобные друг другу подсистемы, получила за истекшие после ее напечатания четверть века широкое развитие.

Выяснилось далее, что „сферическими подсистемами“ (по терминологии Б. В. Кукаркина), подобными подсистеме переменных типа скоплений, являются: подсистема голубых звезд промежуточных светимостей Цвикки-Хьюмасона и подсистема долгопериодических переменных с периодами порядка 200 дней. Наличие в Галактике голубых звезд промежуточных светимостей делает более правдоподобной вторую из указанных в заметке возможностей.

О ВЫВОДЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СКОРОСТЕЙ ЗВЕЗД ИЗ НАБЛЮДАЕМЫХ РАДИАЛЬНЫХ СКОРОСТЕЙ*

(Сообщено Сэром Артуром Эддингтоном)

Одной из наиболее важных проблем звездной статистики является вывод функции распределения пространственных скоростей звезд различных спектральных типов и абсолютных величин в нашей окрестности. Точное решение этой проблемы требует знания пространственных скоростей большого числа звезд. Определение же пространственной скорости данной звезды возможно только в том случае, когда измерены три различные величины: радиальная скорость, собственное движение и параллакс. Эти величины измеряются с различной относительной степенью точности и подвержены систематическим ошибкам совершенно различного рода. Для некоторых важных групп звезд (например, звезд типа В) мы имеем весьма немногочисленные надежные индивидуальные параллаксы. Вообще, число надежных параллаксов обычно мало и сравнительно немногие звезды с известными радиальными скоростями имеют известные параллаксы.

Поэтому некоторые авторы пытались получить сведения о законе распределения пространственных скоростей из одних только радиальных скоростей. Однако в каждом таком случае принимался более или менее произвольный вид этого закона и задача ограничивалась нахождением численных значений некоторых постоянных параметров, входящих в этот закон распределения. В большинстве случаев эти постоянные являются элементами эллипсоидов скоростей.

Благодаря однородности каталогов радиальных скоростей результаты, основанных на них статистических исследований почти свободны от влияния систематических ошибок. Представляется желательным в связи с этим попытаться решить задачу о выводе функции распределения пространственных скоростей из распределения радиальных скоростей, не делая никаких предположений о виде этой функции.

* On the Derivation of the Frequency Function of Space Velocities of the Stars from the observed Radial Velocities. MN, **96**, 172, 1935.

Насколько известно автору, эта проблема не только до сих пор остается нерешенной, но даже не обсуждена сколько-нибудь детально.

Целью настоящей статьи является вывод общей формулы, которая дает нам возможность вычислить функцию распределения пространственных скоростей из распределения радиальных скоростей.

Будет показано, что функция распределения пространственных скоростей является решением некоторого интегрального уравнения. Получаемая из наблюдений функция распределения радиальных скоростей для различных частей неба входит в это уравнение как известная функция. Ниже мы даем вывод этого уравнения и его решение.

Основное допущение. Мы допустим, что различные элементарные объемы пространства в нашей окрестности имеют практически идентичные функции распределения пространственных скоростей. В действительности, при рассмотрении сравнительно редких типов звезд (например, цефеид) необходимо использовать также далекие звезды, так как число звезд таких типов в нашей окрестности очень мало. В таких случаях требуются некоторые поправки за различие между функциями распределения в различных частях Галактики. Действительный процесс введения этих поправок находится вне пределов настоящей статьи. Мы полагаем, что даны радиальные скорости достаточно большого числа близких звезд, расположенных в различных частях неба, и наша цель — вывести функцию распределения пространственных скоростей из этих радиальных скоростей.

Мы сперва рассмотрим двухмерную задачу. Она представляет особый интерес, так как некоторые типы звезд сильно сконцентрированы около галактической плоскости и z -компоненты их скоростей малы.

Двухмерная задача. Если звезды распределены на плоскости и мы расположены в той же плоскости, то для каждой звезды мы можем измерить ее радиальную скорость V и видимое положение или азимут, отсчитанный от некоторого фиксированного направления. В случае звезд с высокой галактической концентрацией роль такого азимута играет галактическая долгота. Пусть $f(V, \alpha) dV d\alpha$ будет число наблюдаемых звезд с азимутами между α и $\alpha + d\alpha$ и радиальными скоростями между V и $V + dV$. Функция $f(V, \alpha)$ должна быть получена из каталогов радиальных скоростей звезд. Если, далее, $n(\alpha) d\alpha$ есть общее число звезд, наблюдаемых в направлениях между α и $\alpha + d\alpha$, то мы имеем:

$$n(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(V, \alpha) dV.$$

Пусть $\psi(\xi, \eta)$ будет неизвестная функция распределения истинных скоростей. Согласно определению, $\psi(\xi, \eta) d\xi d\eta$ есть относительное число звезд, для которых компоненты скоростей находятся в пределах ξ и $\xi + d\xi$, η и $\eta + d\eta$. Мы имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi, \eta) d\xi = 1.$$

Среди наблюдаемых звезд с азимутами, заключенными в интервале $(\alpha, \alpha + d\alpha)$, мы имеем $n(\alpha) d\alpha \psi(\xi, \eta) d\xi d\eta$ звезд со скоростями, заключенными внутри элемента $d\xi d\eta$ „плоскости скоростей“ $\xi\eta$.

Мы можем направить ξ — ось к азимуту $\alpha = 0$. Тогда ясно, что все звезды, наблюдаемые в азимуте α , для которых скорости лежат внутри полоски S плоскости $\xi\eta$ (см. рис.), имеют радиальные скорости, лежащие между V и $V + dV$. Поэтому из $n(\alpha) d\alpha$ звезд, внутри интервала $(\alpha, \alpha + d\alpha)$,

$$n(\alpha) d\alpha \int_{(S)} \psi(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

звезды будут иметь радиальные скорости, заключенные между V и $V + dV$. Интегрирование выполняется по полоске (S) , перпендикулярной к направлению α и шириной dV .

С другой стороны, число таких звезд мы обозначили через

$$f(V, \alpha) dV d\alpha.$$

Поэтому мы имеем уравнение:

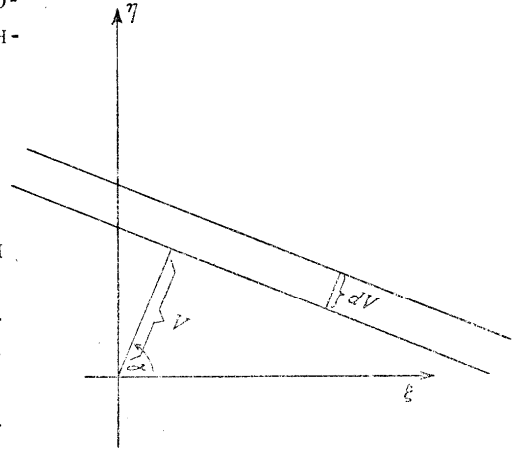
$$f(V, \alpha) dV = n(\alpha) \int_{(S)} \psi(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (1)$$

Введем под знак интеграла вместо ξ и η новые координаты:

$$\xi' = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha,$$

$$\eta' = -\xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha.$$

Ясно, что внутри полоски (S) ξ' меняется между V и $V + dV$, а η' меняется между $-\infty$ и $+\infty$. Следовательно,



$$\int_{(S)} \psi(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_V^{V+dV} d\xi' \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi' \cos \alpha - \eta' \sin \alpha, \xi' \sin \alpha + \eta' \cos \alpha) d\eta'.$$

Если разделим уравнение (1) на $n(\alpha)$ и положим

$$F(V, \alpha) = \frac{f(V, \alpha)}{n(\alpha)} = \frac{f(V, \alpha)}{\int f(V, \alpha) dV},$$

мы получим уравнение

$$F(V, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(V \cos \alpha - \eta' \sin \alpha, V \sin \alpha + \eta' \cos \alpha) d\eta'. \quad (2)$$

Левая часть этого уравнения может быть получена из подсчетов звезд в каталогах радиальных скоростей.

Возвращаясь к старым координатам ξ и η , мы можем уравнение (2) написать в следующем виде:

$$F(V, \alpha) = \int_{(L)} \psi(\xi, \eta) ds, \quad (3)$$

где интегрирование выполняется по прямой линии (L) , определяемой уравнением

$$\xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha = V, \quad (4)$$

а ds представляет элемент этой линии.

Уравнение (3) выражает следующую задачу:

Величина интеграла (3) для каждой прямой линии в плоскости ξ, η дается как функция параметров V и α , определяющих прямую. Должна быть найдена подинтегральная функция $\psi(\xi, \eta)$.

Решение этой задачи сравнительно просто. Введем в обе части (2) вместо V выражение

$$V = x \cos \alpha + y \sin \alpha + W, \quad (5)$$

где x, y и W —некоторые определенные параметры. Тогда (2) можно переписать в виде:

$$F(x \cos \alpha + y \sin \alpha + W, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x \cos^2 \alpha + y \sin \alpha \cos \alpha + W \cos \alpha - \eta' \sin \alpha, \\ x \cos \alpha \sin \alpha + y \sin^2 \alpha + W \sin \alpha + \eta' \cos \alpha) d\eta'.$$

Если ввести новую переменную интегрирования

$$r' = U - x \sin \alpha + y \cos \alpha, \quad (6)$$

то наше уравнение примет простой вид:

$$F(x \cos \alpha + y \sin \alpha + W, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x + W \cos \alpha - U \sin \alpha, \\ y + W \sin \alpha + U \cos \alpha) dU. \quad (7)$$

Умножая обе части этого уравнения на $d\alpha$, интегрируя между 0 и 2π и изменяя порядок интегрирования в правой части, мы найдем:

$$\int_0^{2\pi} F(x \cos \alpha + y \sin \alpha + W, \alpha) d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} dU \int_0^{2\pi} \psi(x + W \cos \alpha - U \sin \alpha, \\ y + W \sin \alpha + U \cos \alpha) d\alpha. \quad (8)$$

Теперь легко видеть, что интеграл

$$\Phi = \int_0^{2\pi} \psi(x + W \cos \alpha - U \sin \alpha, y + W \sin \alpha + U \cos \alpha) d\alpha \quad (9)$$

зависит только от x , y и $\sqrt{W^2 + U^2}$. В самом деле, если введем в (9)

$$\left. \begin{aligned} W &= G \cos \beta \\ U &= G \sin \beta \end{aligned} \right\}, \quad (10)$$

мы получим:

$$\Phi = \int_0^{2\pi} \psi[x + G \cos(\alpha + \beta), y + G \sin(\alpha + \beta)] d\alpha,$$

и, очевидно, этот интеграл зависит только от x , y и $G = \sqrt{W^2 + U^2}$ и не зависит от $\beta = \arctg \frac{U}{W}$.

Поэтому мы можем написать просто:

$$\Phi(x, y, G) = \int_0^{2\pi} \psi(x + G \cos \alpha, y + G \sin \alpha) d\alpha \quad (11)$$

и

$$\int_0^{2\pi} F(x \cos \alpha + y \sin \alpha + W, \alpha) d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x, y, G) dU. \quad (12)$$

Однако

$$dU = \frac{GdG}{\sqrt{G^2 - W^2}},$$

и мы можем переписать (12) в следующем виде:

$$\int_0^{2\pi} F(x \cos \alpha + y \sin \alpha + W, \alpha) d\alpha = 2 \int_W^{\infty} \Phi(x, y, G) \frac{GdG}{\sqrt{G^2 - W^2}}. \quad (13)$$

Это уравнение является интегральным уравнением типа Абеля для функции $\Phi(x, y, G)$ и его решение дается формулой:

$$\Phi(x, y, G) = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{G} \frac{d}{dG} \int_G^{\infty} \frac{WdW}{\sqrt{W^2 - G^2}} \int_0^{2\pi} F(x \cos \alpha + y \sin \alpha + W, \alpha) d\alpha. \quad (14)$$

Согласно (11) имеем:

$$\Phi(x, y, 0) = 2\pi\psi(x, y), \quad (15)$$

и мы можем переписать (14) в виде

$$\psi(x, y) = -\frac{1}{2\pi^2} \lim_{G \rightarrow 0} \frac{1}{G} \frac{d}{dG} \int_G^{\infty} \frac{WdW}{\sqrt{W^2 - G^2}} \bar{F}(x, y, W), \quad (16)$$

где функция

$$\bar{F}(x, y, W) = \int_0^{2\pi} F(x \cos \alpha + y \sin \alpha + W, \alpha) d\alpha \quad (17)$$

может быть получена из наблюдений. После некоторых преобразований мы можем привести (16) к виду

$$\psi(x, y) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{W} \frac{d\bar{F}(x, y, W)}{dW} dW. \quad (18)$$

Эта формула дает решение нашей задачи. Численное определение $\bar{F}(x, y, W)$, когда функция $F(V, \alpha)$ задана, может быть выполнено без затруднения.

Мы практически применили нашу формулу к радиальным скоростям звезд типа В, наблюдаемых в галактическом поясе $|b| < 20^\circ$ и результаты применения находятся в удовлетворительном согласии с распределением скоростей, выведенным из прямых подсчетов известных пространственных скоростей. Подробности этого применения будут даны в другом месте.

Трехмерная задача. В случае трехмерной задачи мы можем из каталогов определить число звезд, наблюдаемых внутри данного телесного угла $d\omega$ в данном направлении, имеющих радиальную скорость, заключенную в интервале от V до $V + dV$. Обозначим это число через $f(V, l, b) d\omega$, где l и b — галактическая долгота и широта. Если, далее, общее число наблюдаемых звезд в том же телесном угле $n(l, b) d\omega$, то мы будем иметь:

$$n(l, b) = \int f(V, l, b) dV. \quad (19)$$

Как и в случае двумерной задачи, мы имеем следующее соотношение между функцией распределения пространственных скоростей $\psi(\xi, \eta, \zeta)$ и наблюдаемой функцией $f(V, l, b)$:

$$f(V, l, b) dV = n(l, b) \int \int \int_{\Omega} \psi(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta, \quad (20)$$

где интегрирование распространяется на объем (Ω) в $\xi\eta\zeta$ -пространстве, заключенный между двумя параллельными плоскостями, перпендикулярными к направлению (l, b) и имеющими расстояния V и $V + dV$ от начала.

Деля (20) на $n(l, b)$, после некоторых преобразований мы можем привести это уравнение к виду:

$$F(V, l, b) = \int \int_{(\Sigma)} \psi(\xi, \eta, \zeta) d\sigma, \quad (21)$$

где

$$F(V, l, b) = \frac{f(V, l, b)}{n(l, b)}, \quad (22)$$

а интегрирование распространяется на плоскость (Σ), перпендикулярную к направлению (l, b) и находящуюся на расстоянии V от начала.

Уравнение этой плоскости дается формулой:

$$\xi \cos l \cos b + \eta \sin l \cos b + \zeta \sin b = V. \quad (\Sigma)$$

Если мы введем в плоскости (Σ) полярные координаты ρ и θ с началом в точке

$$\xi = V \cos l \cos b; \quad \eta = V \sin l \cos b; \quad \zeta = V \sin b,$$

то для точек этой плоскости мы будем иметь:

$$\xi = V \cos l \cos b + \rho (\alpha_1 \cos \theta + \beta_1 \sin \theta),$$

$$\eta = V \sin l \cos b + \rho (\alpha_2 \cos \theta + \beta_2 \sin \theta),$$

$$\zeta = V \sin b + \rho (\alpha_3 \cos \theta + \beta_3 \sin \theta),$$

где коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ удовлетворяют условиям:

$$\alpha_1 \cos l \cos b + \alpha_2 \sin l \cos b + \alpha_3 \sin b = 0,$$

$$\beta_1 \cos l \cos b + \beta_2 \sin l \cos b + \beta_3 \sin b = 0,$$

$$\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 = 0.$$

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1; \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1.$$

Теперь мы можем переписать уравнение (21) в этих координатах:

$$F(V, l, b) = \int_0^\infty \rho d\rho \int_0^{2\pi} \psi [V \cos l \cos b + \rho (\alpha_1 \cos \theta + \beta_1 \sin \theta), \\ V \sin l \cos b + \rho (\alpha_2 \cos \theta + \beta_2 \sin \theta), \\ V \sin b + \rho (\alpha_3 \cos \theta + \beta_3 \sin \theta)] d\theta.$$

Интегрируя по всем направлениям и изменяя порядок интегрирования в правой части, мы получим:

$$\int F(V, l, b) d\omega = \int \psi \rho d\rho, \quad (23)$$

где

$$\Phi = \int d\omega \int_0^{2\pi} \psi [V \cos l \cos b + \rho (\alpha_1 \cos \theta + \beta_1 \sin \theta), \\ V \sin l \cos b + \rho (\alpha_2 \cos \theta + \beta_2 \sin \theta), \\ V \sin b + \rho (\alpha_3 \cos \theta + \beta_3 \sin \theta)] d\theta.$$

Если мы введем новые параметры:

$$V = G\gamma_1; \quad \rho \cos \theta = G\gamma_2; \quad \rho \sin \theta = G\gamma_3; \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1,$$

интеграл Φ примет вид:

$$\Phi = \int d\theta \int \psi [G(\gamma_1 \cos l \cos b + \gamma_2 \alpha_1 + \gamma_3 \beta_1), \\ G(\gamma_1 \sin l \cos b + \gamma_2 \alpha_2 + \gamma_3 \beta_2), \\ G(\gamma_1 \sin b + \gamma_2 \alpha_3 + \gamma_3 \beta_3)] d\omega,$$

и можно показать, что он зависит только от G . Можем написать

$$\Phi(G) = 2\pi \int \psi(G \cos l \cos b, G \sin l \cos b, G \sin b) d\omega; \quad \Phi(0) = 8\pi^2 \psi(0, 0, 0). \quad (24)$$

Теперь мы имеем:

$$G^2 = V^2 + \rho^2; \quad \rho d\rho = G dG.$$

Следовательно,

$$\int F(V, l, b) d\omega = \int_V^\infty \Phi G dG \quad (25)$$

и

$$\Phi = -\frac{1}{V} \cdot \frac{d}{dV} \int F(V, l, b) d\omega. \quad (26)$$

Сравнивая (26) с (24), мы найдем:

$$\psi(0, 0, 0) = \frac{1}{8\pi^2} \Phi(0) = -\lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \cdot \frac{d}{dV} \int F(V, l, b) d\omega.$$

Таким образом мы можем найти $\psi(0, 0, 0)$. Тем же путем после длинных преобразований мы получим:

$$\psi(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{W} \frac{d}{dW} \int F(\xi \cos l \cos b + \eta \sin l \cos b + \zeta \sin b + W, l, b) d\omega.$$

Эта формула представляет решение трехмерной задачи.

Заключительные замечания. Многие детали вышеизложенного метода еще не рассмотрены. Например, в нашем методе предполагается, что K -эффект отсутствует, так как при наличии K -эффекта функция распределения пространственных скоростей различна в различных направлениях. В действительности, однако, мы можем K -член определить из радиальных скоростей и исключить его.

Рассмотрение практической части предложенного выше метода с применением к некоторым классам звезд будет дано в ином месте*.

Астрономическая обсерватория
университета, Ленинград
20 ноября 1935 г.

* См. следующую статью этого сборника. *Ред.*

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СКОРОСТЕЙ ЗВЕЗД ТИПОВ В и F*

В настоящей работе дается применение разработанного автором метода определения распределения пространственных скоростей из наблюдаемых радиальных скоростей. Именно, выведено распределение проекций пространственных скоростей на галактическую плоскость из рассмотрения радиальных скоростей звезд, лежащих в низких галактических широтах.

Метод применен к трем различным группам звезд (В0—В3, В5—В9 и F). Результаты применения к звездам типа В оказываются в хорошем согласии со всем тем, что мы уже ранее знали о распределении скоростей этих звезд. Что касается звезд типа F, то для них получается вторичный максимум функции распределения для скорости 10 км/сек в направлении 90° галактической долготы. Это расходится с данными о полных скоростях звезд этого типа. Численные значения функции распределения, выведенные по радиальным скоростям, даны на фиг. 1, 2 и 3. Каждый из этих графиков представляет плоскость скоростей, точнее проекций скоростей, на галактическую плоскость. Центр графиков соответствует скорости Солнца. Следовательно все скорости отнесены к Солнцу.

1. В в е д е н и е

Одной из важнейших проблем звездной статистики является определение функции распределения пространственных скоростей для различных физических типов звезд. Шварцшильд предполагал, что эта функция имеет вид:

$$\psi(\xi, \eta, \zeta) = Ae^{-Q(\xi, \eta, \zeta)}, \quad (1)$$

где $Q(\xi, \eta, \zeta)$ — положительно определенная квадратичная форма относительно переменных ξ, η, ζ . Главная цель прежних статистических исследований скоростей звезд заключалась в определении коэффициентов, входящих в $Q(\xi, \eta, \zeta)$. Эти коэффициенты обычно называются „элементами эллипсоида скоростей“. Однако имеются серьезные указания на то, что функция распределения скоростей $\psi(\xi, \eta, \zeta)$ заметно отклоняется от стандартной формы (1). Это было доказано, например, в хорошо известной работе Оорта относительно звезд с высокими ско-

* On the Distribution of Space Velocities of B and F Type Stars. Труды АО ЛГУ, 7, 21, 1936.

ростями. В самом деле, согласно Оорту относительное число звезд со скоростями > 50 км/сек сильно превосходит значение, которое может получаться по формуле (1), когда коэффициенты, входящие в $Q(\xi, \eta, \zeta)$, определены обычным путем [1].

Эти отклонения настолько велики, что многие авторы рассматривали звезды с высокими скоростями как особую группу и определяли различные кинематические свойства этой группы (скорость Солнца относительно этой группы, дисперсию скоростей и пр.).

Насколько нам известно, еще не было сделано попытки определить функцию распределения пространственных скоростей звезд без какого-нибудь предположения относительно формы этой функции. Как нам кажется, эта проблема особенно интересна благодаря тому факту, что сравнение функций распределения скоростей различных физических типов звезд может дать нам возможность сделать некоторые заключения относительно пути звездной эволюции. Так, исключительная дисперсия скоростей переменных типа шаровых скоплений привела нас к выводу, что их средняя продолжительность жизни того же порядка, что и возраст нашей Галактики [2].

Прямой метод определения функции распределения пространственных скоростей требует знания пространственных скоростей большого числа звезд. Получение пространственной скорости данной звезды возможно в том случае, когда измерены три различные величины: радиальная скорость, собственное движение и параллакс. Для некоторых важных групп звезд (например для звезд типа В) мы имеем очень мало надежных параллаксов. Поэтому применение этого метода сильно ограничено.

С другой стороны, современные каталоги радиальных скоростей содержат весьма надежные и достаточно однородные данные. Поэтому было бы интересно попытаться найти функцию распределения только из радиальных скоростей. Для некоторых физических типов звезд (например звезд типа В) этот путь неизбежен из-за отсутствия надежных параллаксов. Недавно автор [3] дал общее решение этой проблемы. Было показано, что решение этой проблемы можно выразить в конечной форме. Если мы хотим найти только распределение проекций векторов скоростей на галактическую плоскость (плоская проблема), то необходимо знать радиальные скорости звезд, расположенных в некоторой узкой зоне, вблизи галактического экватора.

В настоящей работе мы попытаемся найти распределение проекций скоростей на галактическую плоскость, т. е. распределение компонент ξ и η для некоторых типов звезд. Пусть соответствующая функция распределения будет $\varphi(\xi, \eta)$. Ясно, что:

$$\varphi(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi, \eta, \zeta) d\zeta.$$

На современной стадии развития звездной статистики будет, по-видимому, трудно определить полную функцию $\psi(\xi, \eta, \zeta)$. При современном объеме наблюдательных данных кажется более подходящим попытаться определить приблизительно функцию распределения $\varphi(\xi, \eta)$ проекций на галактическую плоскость и функцию распределения ζ -компонент скоростей $f(\zeta)$:

$$f(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int \psi(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta.$$

Хотя знание функций $\varphi(\xi, \eta)$ и $f(\zeta)$ не может заменить знание полной функции распределения $\psi(\xi, \eta, \zeta)$, однако они все же дают больше сведений о поведении этой функции распределения, чем постоянные эллипсоида дисперсии.

2. Основные формулы

В статье, цитированной выше, автор показал, что функция $\varphi(\xi, \eta)$ может быть определена из радиальных скоростей звезд, расположенных в узком галактическом поясе. Задача приводилась к интегральному уравнению:

$$F(V, \alpha) = \int_{(L)} \varphi(\xi, \eta) ds,$$

где $\varphi(\xi, \eta)$ — неизвестная функция, интегрирование производится по прямой L , определяемой уравнением

$$\xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha = V,$$

и ds — элемент этой прямой.

Функция $F(V, \alpha)$ определяется формулой:

$$F(V, \alpha) = \frac{f(V, \alpha)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(V, \alpha) dV}, \quad (2)$$

где $f(V, \alpha) dV d\alpha$ — число звезд, наблюдаемых в галактических долготях, заключенных между α и $\alpha + d\alpha$, и с радиальными скоростями между V и $V + dV$.

Как мы показали, решение уравнения (1) имеет вид:

$$\varphi(\xi, \eta) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{W} \frac{d\bar{F}(\xi, \eta, W)}{dW} dW, \quad (3)$$

где функция $\bar{F}(\xi, \eta, W)$ получается из $F(V, \alpha)$ согласно формуле:

$$\bar{F}(\xi, \eta, W) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha + W, \alpha) d\alpha. \quad (4)$$

Уравнение (4) может быть написано также в форме:

$$\bar{F}(\xi, \eta, W) = \int_{(M)} F(V, \alpha) d\alpha,$$

где интегрирование производится по синусоиде (M):

$$V = W + \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha. \quad (M)$$

Мы можем ввести абсолютное значение скорости U и направление β вместо прямоугольных компонент ξ и η . Тогда уравнение кривой (M) примет вид:

$$V = W + U \cos(\alpha - \beta)$$

и \bar{F} и φ будут зависеть от U и β вместо ξ и η .

3. Выбор системы, к которой отнесены скорости

Если мы не вводим поправок, зависящих от движения Солнца, то аргументы ξ и η полученной функции распределения $\varphi(\xi, \eta)$ будут компонентами скоростей звезд, отнесенными к Солнцу. Но можно также ввести, согласно обычному методу, поправки наблюдаемых радиальных скоростей $\Delta V = V_{\odot} \cos(\alpha - \alpha_{\odot})$ за движение Солнца относительно некоторой определенной координатной системы. В этом случае мы получим функцию распределения, зависящую от компонент в этой системе. Кажется, что оба метода должны дать идентичные результаты. Однако, когда функция $F(V, \alpha)$ дана численно и все вычисления носят численный характер, один из этих методов может быть предпочтительнее. В настоящей статье мы предполагали, что Солнце фиксировано и не вводили поправок к радиальным скоростям. Следовательно, мы получим функцию распределения скоростей, отнесенную к Солнцу.

4. Данные о радиальных скоростях

Радиальные скорости, использованные в настоящей работе, взяты из карточного каталога, составленного на Астрономической обсерватории ЛГУ. Этот каталог содержит все звезды общего каталога радиальных скоростей Мура [4], так же как и звезды Симеизского каталога [5].

Галактическая зона должна быть достаточно широкой, так как в противном случае число звезд с наблюдаемыми радиальными скоростями будет недостаточным для нашей цели. Однако мы не можем удалиться далеко от галактического экватора, потому что на высоких широтах влияние ζ -компоненты на радиальную скорость будет большим. Мы выбрали галактический пояс в пределах широт $b = -20^\circ$ и $b = +20^\circ$.

В настоящей статье содержатся результаты применения нашего метода к трем группам звезд.

1. Звезды типа В0—В3, из вышеупомянутого карточного каталога, для которых $|b| < 20^\circ$. Все звезды этого типа слабее $7^m 0$ были исключены, так как для этих слабых звезд эффект галактического вращения достаточно велик. В то же время точные расстояния этих звезд неизвестны и поэтому трудно вводить соответствующие поправки.

2. Звезды типа В5—В9 ярче, чем $7^m 0$ в той же галактической зоне.

3. Все звезды типа F в той же зоне без ограничения абсолютной величины (гиганты и карлики вместе).

Во всех случаях звезды с переменными радиальными скоростями, для которых скорости центра тяжести измерены, также были включены. В противном случае звезды с переменной скоростью были исключены. Число звезд каждой группы дано ниже:

Спектральный тип	Число звезд
В0—В3	516
В5—В9	398
F0—F8	379

5. Таблицы функции $F(V, \alpha)$

Звезды каждого типа были разбиты на 24 группы, соответственно галактической долготы. В первую группу были включены все звезды, имеющие долготы между 0 и 30° , во вторую группу — звезды с долготами между 15 и 45° и т. д. Следовательно, каждая звезда

входила в две группы. Каждая из этих групп, в свою очередь, была разбита на 12 подгрупп, в соответствии с радиальными скоростями. В первую подгруппу каждой группы были включены все звезды группы с радиальными скоростями < -50 км/сек, во вторую — все звезды с радиальными скоростями между -50 и -40 км/сек; в третью — все звезды со скоростями между -40 и -30 км/сек и в последнюю группу — все звезды со скоростями, большими, чем $+50$ км/сек.

После этого группы, расположенные в противоположных частях неба (различающихся на 180° по долготе), были скомбинированы таким образом, что каждая подгруппа, полученная для некоторого интервала положительных радиальных скоростей, была дополнена подгруппой, полученной для соответствующего интервала отрицательных скоростей другой группы.

Так, например, звезды, расположенные в пределах галактических долгот 210 и 240° и имеющие скорости, заключенные между -20 и -30 км/сек, были прибавлены к звездам, расположенным между галактическими долготами 30 и 60° и имеющими скорости, заключенные между $+20$ и $+30$ км/сек.

Возможность такого объединения связана с тем, что звезда, видимая при долготе α и имеющая радиальную скорость V , для нашей цели эквивалентна звезде с галактической долготой $\alpha + 180^\circ$ и с радиальной скоростью $-V$.

Поэтому мы получили только 12 новых групп звезд в интервалах: $0-30^\circ$, $15-45^\circ$... $165-195^\circ$, и каждый из этих интервалов был разбит на 12 подгрупп, согласно величинам радиальных скоростей.

Число звезд в каждой группе может быть взято равным значению функции $f(V, \alpha)$ для середины соответствующего интервала α и соответствующего интервала V . Более точно, полученные числа равны значению $f(V, \alpha) dV d\alpha$. Но произведение $dV d\alpha$ во всех случаях остается постоянным ($dV = 10$ км/сек, $d\alpha = \frac{\pi}{6}$). Поэтому наши числа представляют значения $f(V, \alpha)$, умноженные на некоторый несущественный постоянный коэффициент. Далее, полное число звезд в группе принималось за значение $\int_{-\infty}^{\infty} f(V, \alpha) dV$, так как группы были образованы соответственно галактическим долготам звезд.

После этого уже не представляло трудностей определить значения функции $F(V, \alpha)$ согласно (2) для всех необходимых частей плоскости V, α .

Значения функции $F(V, \alpha)$ для наших трех типов звезд, вычисленные таким путем, даны в таблицах 1, 2, 3.

Таблица 1

Значения функции $F(V, \alpha)$ для звезд В0—В3

α V	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
> +50 км/сек	0.9	—	—	—	—	—	—	1.2	1.1	1.2	1.5	0.9
+40 до +50	0.9	—	—	—	—	—	1.0	1.2	1.1	2.4	3.0	1.7
+30 до +40	8.9	—	—	—	—	—	1.0	1.2	1.1	1.2	6.0	11.9
+20 до +30	24.9	1.2	0.9	—	—	0.9	3.0	3.7	7.7	9.7	13.6	29.8
+10 до +20	17.7	1.2	1.8	3.3	2.5	2.6	6.1	9.8	18.8	20.6	24.1	26.3
0 до +10	2.7	4.8	4.5	4.1	5.9	6.1	10.1	18.4	17.6	18.2	19.6	6.8
-10 до 0	4.4	10.9	18.7	25.6	21.9	19.1	20.2	22.2	26.5	23.0	10.6	3.4
-20 до -10	8.0	21.8	23.9	25.6	33.7	30.4	19.2	17.2	8.8	8.5	6.0	1.7
-30 до -20	10.6	27.9	23.9	19.8	17.7	18.2	11.1	3.7	3.3	1.2	—	1.7
-40 до -30	5.3	13.3	7.1	4.1	3.4	4.3	4.0	1.2	—	—	1.5	0.9
-50 до -40	0.9	4.8	5.3	3.3	0.8	0.9	6.1	6.2	—	—	—	—
< -50	0.9	—	—	—	—	3.5	4.0	—	—	—	—	0.9

Таблица 2

Значения функции $F(V, \alpha)$ для звезд В5—В9

α V	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
> +50 км/сек	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
+40 до +50	—	—	—	—	—	—	—	—	2.4	2.9	—	—
+30 до +40	4.6	—	—	—	—	—	—	1.0	1.2	4.3	8.1	9.1
+20 до +30	6.9	—	0.9	0.8	0.8	2.3	2.5	2.0	1.2	5.8	10.8	13.0
+10 до +20	18.3	1.1	0.9	0.8	0.8	—	2.5	6.8	5.9	14.4	20.3	28.6
0 до +10	2.3	2.2	1.8	3.9	7.2	7.7	5.7	13.6	24.9	23.1	19.0	10.4
-10 до 0	9.2	14.1	8.9	8.5	10.4	16.2	23.8	22.4	16.6	11.5	5.4	2.6
-20 до -10	9.2	19.6	23.9	18.5	15.2	20.0	14.7	10.7	10.7	2.9	1.4	1.3
-30 до -20	11.4	15.2	16.8	26.2	24.1	13.9	9.0	4.8	2.4	1.4	1.4	1.3
-40 до -30	4.6	8.7	7.1	4.6	3.2	5.4	4.9	2.0	1.2	—	—	—
-50 до -40	—	5.4	6.2	2.3	0.8	0.8	1.0	—	—	—	—	—
< -50	—	—	0.8	0.8	—	1.6	2.0	—	—	—	—	—

Таблица 3

Значения функции $F(V, \alpha)$ для звезд типа F

α V	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
< -50 км/сек	—	3.7	6.6	3.8	—	—	1.0	2.5	1.3	1.0	0.9	—
-50 до -40	0.9	4.6	2.8	5.7	5.0	3.3	3.1	2.5	—	—	—	—
-40 до -30	0.9	7.4	7.5	5.7	7.0	2.2	2.1	2.5	2.7	2.1	0.9	0.8
-30 до -20	2.7	7.4	12.3	15.3	11.0	7.6	8.3	3.8	4.0	2.1	0.9	3.3
-20 до -10	8.2	9.3	8.5	13.4	19.1	14.2	6.2	3.8	1.3	3.2	4.4	7.4
-10 до 0	8.2	13.0	10.4	3.8	5.0	13.1	13.5	11.4	12.1	8.4	7.0	8.2
0 до +10	11.0	10.2	11.3	12.4	12.0	14.2	15.5	18.9	20.2	13.7	13.2	10.7
+10 до +20	10.1	4.6	1.9	2.9	4.0	7.6	8.3	6.3	9.4	9.5	6.1	5.7
+20 до +30	9.2	0.9	0.9	—	—	—	1.0	7.6	10.8	9.5	7.9	9.8
+30 до +40	3.7	0.9	0.9	—	—	1.1	2.1	1.3	1.3	9.5	15.8	10.7
+40 до +50	7.3	0.9	—	—	—	—	—	—	—	2.1	3.5	5.7
> +50	0.9	—	—	—	—	—	2.1	2.5	—	2.1	2.6	0.8

6. Вычисление функции $\bar{F}(\xi, \eta, W)$

Наиболее трудоемкая часть работы заключалась в вычислении функции $\bar{F}(\xi, \eta, W)$, которая зависит от трех аргументов. Согласно (4),

$$\bar{F}(\xi, \eta, W) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha + W, \alpha) d\alpha, \quad (4)$$

где F есть функция двух аргументов, табулированная в таблицах 1, 2, 3. Как было упомянуто выше, мы можем ввести скорость U и ее направление α ($\xi = U \cos \alpha$, $\eta = U \sin \alpha$). В этом случае уравнение (4) принимает вид:

$$\bar{F}(U, \beta, W) = \int_{(M')} F(V, \alpha) d\alpha, \quad (5)$$

где область интегрирования на плоскости V, α определяется уравнением:

$$V = W + U \cos(\alpha - \beta). \quad (M')$$

Вычисление интеграла (5) для различных значений U, β, W было произведено следующим простым способом.

Значения функции $F(V, \alpha)$ были нанесены в плоскости V, α на каждый прямоугольник размерами $15^\circ \times 10$ км/сек. После этого, на листе кальки для шести различных значений амплитуды U ($U=0, 10, \dots, 50$ км/сек) были начерчены кривые $V = U \cos \alpha$. Наложение этого листа на нашу диаграмму и перемещение его вдоль оси x на W и вдоль оси α на β давало нам возможность сразу же через кальку читать значения функции $F[W + U \cos(\alpha - \beta), \alpha]$ для различных значений α . Суммирование значений этой функции, взятой для 24 равностоящих значений α , дает нам функцию $\bar{F}(U, \beta, W)$. Такое суммирование было сделано для всех вышеуказанных значений U , для $\beta = 0, 15, 30^\circ, \dots$ и $W = 0, 10, \dots, 50$ км/сек.

В случае $U=0$ мы имеем прямую линию вместо синусоиды. Эта прямая остается неизменной после перемещения вдоль оси α . Поэтому число троек значений переменных U, β, W , для которых была вычислена функция $\bar{F}(U, \beta, W)$, было равно 726.

7. Вычисление функции распределения

Выражение (3) для функции распределения может быть преобразовано к виду:

$$\varphi(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\bar{F}(\xi, \eta, 0) - \bar{F}(\xi, \eta, W)}{W^2} dW. \quad (6)$$

При численном определении величины этого интеграла мы встречаемся с некоторыми трудностями. При $W = 0$ подынтегральное выражение неопределенное. Однако можно показать, что выражение

$$\frac{\bar{F}(\xi, \eta, 0) - \bar{F}(\xi, \eta, W)}{W^2}$$

имеет некоторый определенный и ограниченный предел, когда $W \rightarrow 0$. Если L — этот предел, то мы можем приближенно написать для малых значений W :

$$\frac{\bar{F}(\xi, \eta, 0) - \bar{F}(\xi, \eta, W)}{W^2} = L.$$

Представим интеграл в следующей форме:

$$\int_0^{\infty} = \int_0^{W_1} + \int_{W_1}^{\infty},$$

где W_1 , некоторая малая скорость. Тогда мы можем просто написать:

$$\int_0^{W_1} = L W_1.$$

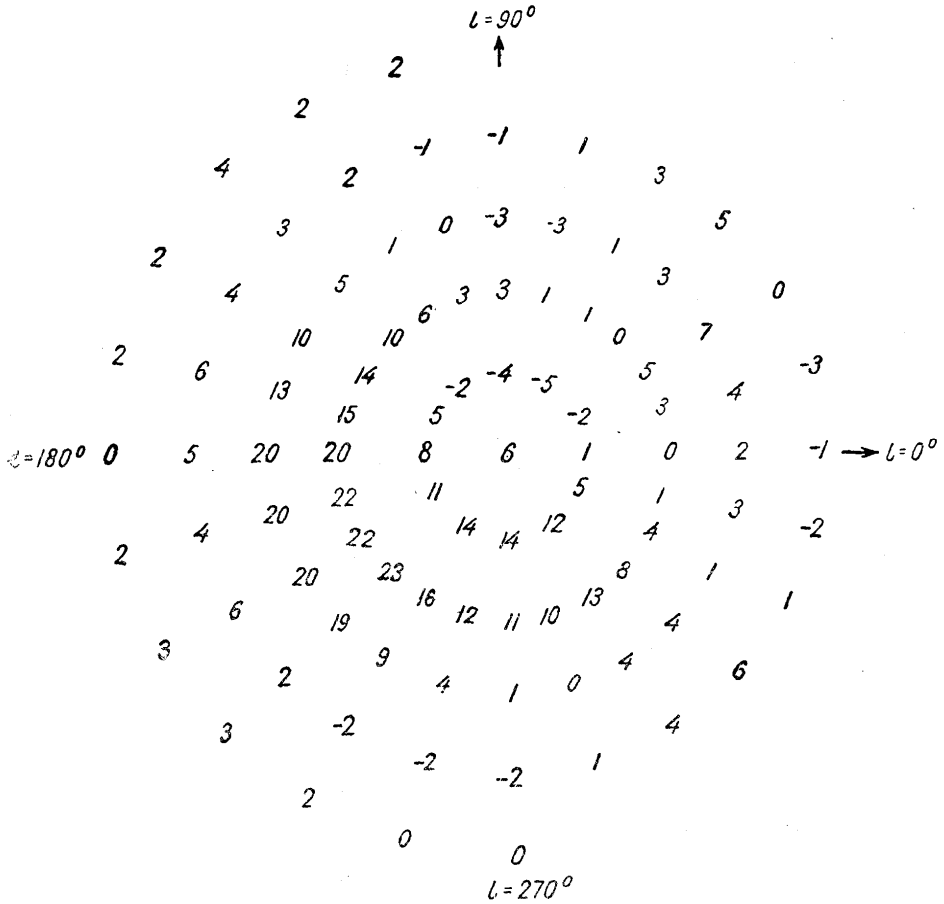
Вторая часть нашего интеграла может быть вычислена согласно обычным формулам численного интегрирования. Величина L дается формулой:

$$L = \frac{\bar{F}(\xi, \eta, 0) - \bar{F}(\xi, \eta, W_1)}{W_1^2}.$$

В наших вычислениях мы приняли $W_1 = 10$ км/сек. В результате вычислений мы получим функцию $\varphi(\xi, \eta)$ или, точнее, $\varphi(U, \beta)$ для различных значений $U(0, 10, \dots, 50$ км) и $\beta(0, 15, 30^\circ, \dots)$.

8. Обсуждение результатов

Фигуры 1, 2, 3 представляют плоскости скоростей, где даны значения функции $\varphi(U, \beta)$, вычисленные для рассмотренных трех спек-

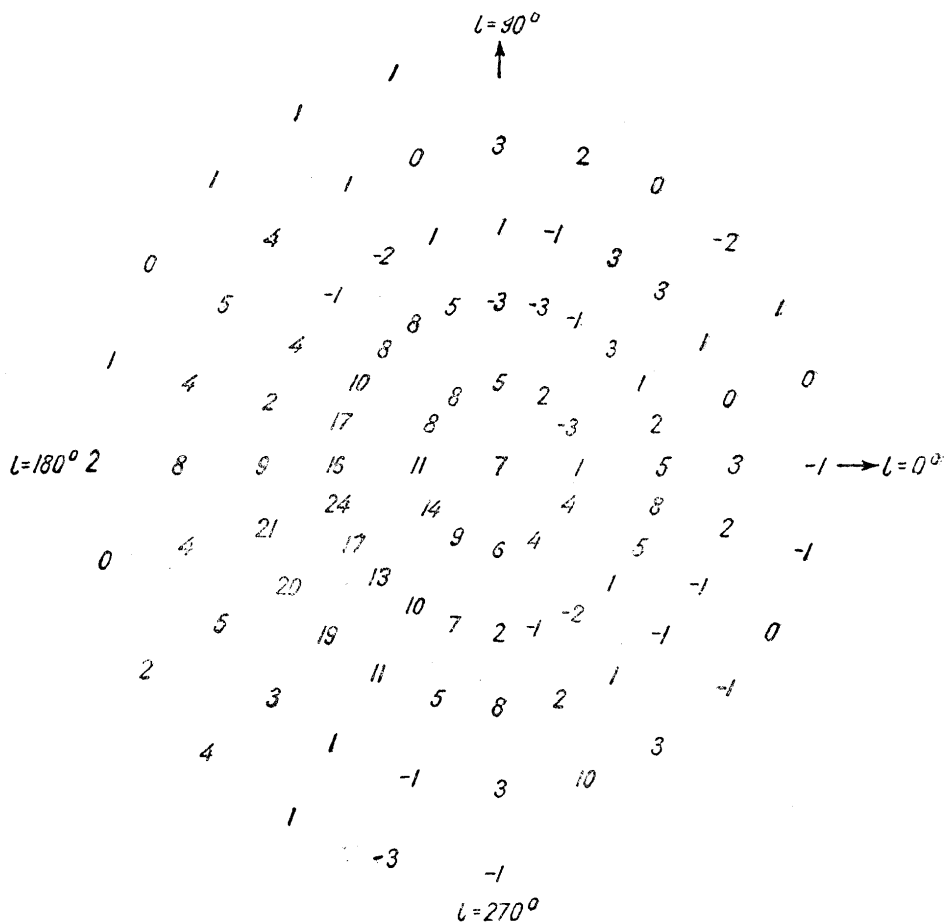


Фиг. 1. Распределение скоростей звезд типов В0 -В3 (из наблюдаемых радиальных скоростей). Масштаб 1 см = 10 км/сек.

тральных классов звезд. На этих фигурах центр соответствует звездам, неподвижным относительно Солнца.

а) Звезды типа В

Как можно видеть из фиг. 1 и 2, максимальная плотность в плоскости скоростей находится при $U = 20$ км/сек, $\beta = 195-210^\circ$, т. е., что Солнце имеет скорость 20 км/сек в направлении $\beta = 15-30^\circ$ относительно звезд, образующих этот максимум плотности. Линии равной плотности имеют несколько вытянутую форму. Направление этой вы-



Фиг. 2. Распределение скоростей звезд типов В5—В9 (из наблюдаемых радиальных скоростей). Масштаб 1 см = 10 км/сек.

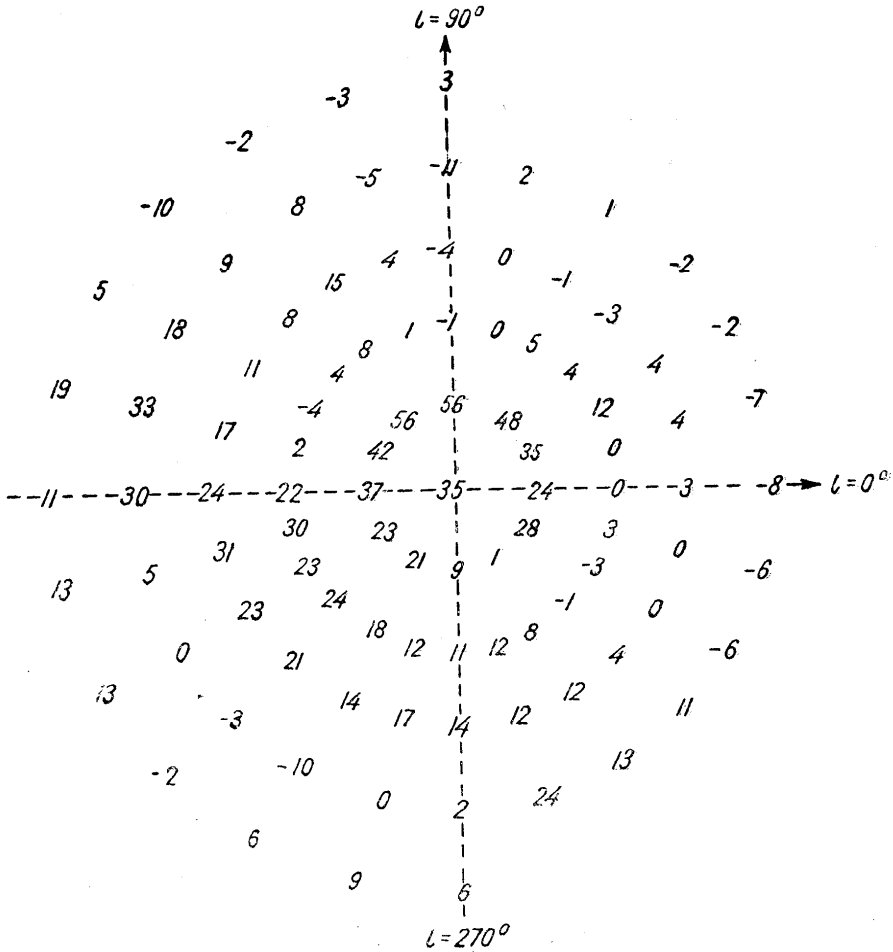
тянутости приблизительно совпадает с известным направлением большой оси эллипсоида скоростей. Как и ожидалось, кое-где появляются отрицательные значения $\varphi(U, \beta)$. Они вызваны статистическими флуктуациями. Следовательно, согласие с обычными методами в случае звезд типа В — удовлетворительное.

б) Звезды типа F

В этом случае общий характер распределения остается таким же (фиг. 3).

Мы имеем один максимум плотности при $U = 30$ км/сек, $\beta = 195^\circ$. Такая большая величина скорости Солнца вызвана большим процентом карликов типа F. Однако имеется другой, неожиданный максимум при $U = 10$ км/сек и $\beta = 90^\circ$. Это означает, что существует

значительное число звезд, движущихся с низкой скоростью (10 км/сек), относительно Солнца. Мы были склонны вначале предположить, что



Фиг. 3. Распределение скоростей звезд типа F (из наблюдаемых радиальных скоростей). Масштаб 1 см = 10 км/сек.

здесь мы встретились со случаем, где метод неприменим. Однако легко показать, что этот дополнительный максимум плотности связан с очень своеобразным распределением радиальных скоростей звезд типа F.

В самом деле, среди звезд типа F имеется значительный излишек звезд с низкими радиальными скоростями. Например, в табл. 4 даются взвешенные числа звезд со скоростями, заключенными в пределах: 0—10 км/сек, 10—20 км/сек и т. д., для звезд типов В и F.

Вес отдельной звезды полагался обратно пропорциональным полному числу звезд в вышеуказанных долготных группах. Введение весов необходимо ввиду неоднородного распределения наблюдаемых звезд.

Такой излишек звезд с низкой радиальной скоростью не может быть объяснен какими-либо статистическими флюктуациями. Более вероятно, что оно вызвано некоторыми реальными особенностями в распределении скоростей звезд типа F.

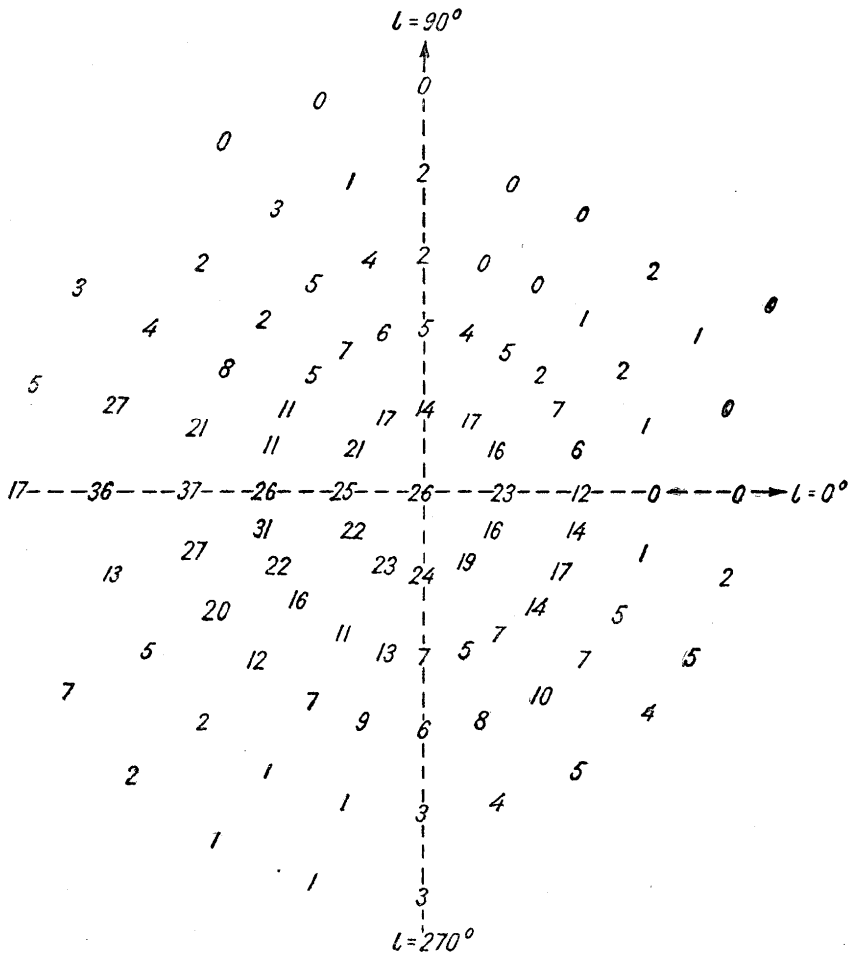
Мы сравнили наши результаты с распределением скоростей, по-

Таблица 4

Тип Диапазон скоростей	F		B0—B3		B5—B9	
	число	процент	число	процент	число	процент
0—10 км/сек	138.7	36	162.5	31	139.7	34
10—20 „	87.7	23	169.8	33	124.2	31
20—30 „	68.1	18	117.2	23	87.6	22
30—40 „	45.2	12	38.2	7	35.0	9
40—50 „	24.8	7	19.8	4	11.7	3
> 50 „	16.0	4	8.0	2	2.6	1
Всего	—	100	—	100	—	100

лученным с помощью прямого метода. А именно, мы брали звезды типа F с известной радиальной скоростью, собственным движением (Boss) и парallaxом (были использованы лишь Маунт-Вилсоновские спектроскопические паралаксы). Вычисленные проекции скоростей на галактическую плоскость нанесены на фиг. 4. Было подсчитано число звезд в пределах кругов с радиусом 7 км/сек, вокруг различных точек плоскости скоростей. Результаты приведены на фиг. 4.

Мы видим, что вторичного максимума при $V = 10$ км/сек и $l = 90^\circ$ не наблюдается. Это противоречие заслуживает специальной дискуссии. Возможно, некоторые звездные потоки (движущиеся скопления) делают наш метод неприемлемым для звезд типа F, так как этот метод основан на предположении тождественности распределения скоростей звезд, наблюдаемых в различных направлениях [3].



Фиг. 4. Распределение скоростей звезд типа F (из пространственных скоростей).
Масштаб 1 см = 10 км/сек.

Заключение

Метод определения распределения скоростей звезд из их радиальных скоростей дает приемлемые результаты, когда число радиальных скоростей порядка 400—500. Выведенное распределение скоростей для звезд типа В0—В3 и В5—В9 согласуется с данными, полученными прежними методами. В случае звезд типа F мы имеем некоторые разногласия.

Необходимо здесь отметить, что симметричное распределение точек вокруг скорости Солнца, где функция $\varphi(U, \beta)$ определена, не способствует обнаружению свойств симметрии и антисимметрии в распределении скоростей.

Возможно, было бы лучше исправить радиальные скорости за движение Солнца до их использования в нашем методе.

Мы показали, что наш метод может быть применен к наблюдательным данным. Мы получили надежные функции распределения для некоторых типов звезд. Но практическая сторона метода может быть, несомненно, в дальнейшем улучшена. Мы надеемся, что эти усовершенствования дадут новые результаты в этой области.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Oort, Publications of the Kapteyn Astr. Lab. at Groningen; № 40, 1926.
2. V. Ambarzumian, Observatory, 1935, May.
3. V. Ambarzumian, MN. **96**, 172, 1936.
4. Lick Observatory Publications, **18**, 1932.
5. Publ. de l'Obs. Poulkovo, **43**, 1933.

О СЛАБЫХ БЕЛЫХ ЗВЕЗДАХ В НИЗКИХ ГАЛАКТИЧЕСКИХ ШИРОТАХ*

1. При рассмотрении ближайших звезд привлекает внимание тот факт, что в пределах сферы с радиусом 5 парсек имеется только одна звезда абсолютно ярче, чем $+1^m 5$ (Сириус), в то время как в пределах той же сферы известны три белых карлика (Сириус В, α_2 Эридана, звезда Ван-Маанена), т. е. столько, сколько карликов типа G. По-видимому, можно быть уверенным, что в пределах этой сферы нет более гигантов, тогда как открытие белых карликов в будущем не исключено. Следовательно, в нашей окрестности пространственная плотность белых карликов превосходит пространственную плотность гигантов всех типов, вместе взятых. Если это не обусловлено случайностью, мы должны заключить, что число белых карликов в галактической системе превосходит число всех гигантов. Открытие четырех новых белых карликов за последние годы [1, 2] подтверждает мнение, что пространственная плотность белых карликов действительно значительна. Подтверждение этого предположения новыми наблюдательными данными придаст особое значение важности всех теоретических и практических проблем, связанных с белыми карликами. С другой стороны, присутствие на диаграмме Рессела особой ветви белых карликов, более богатой, чем ветвь гигантов, должно пролить новый свет на природу этой диаграммы.

Известны две возможности для открытия белых карликов: определение спектра или цвета компонентов двойных звезд и определение спектра или цвета слабых звезд с большим собственным движением. Даже если параллакс двойной звезды не известен, наблюдение спектров обоих компонентов позволяет во многих случаях оценить светимость спутника. Вообще, если яркая компонента не карлик позднего типа, спутник — белый карлик — может быть наблюден в системах с большим Δm . Но в этом случае определение спектра или цвета спут-

* On the Faint White Stars in Low Galactic Latitudes. Астр. Ж. **13**, 1, 1936. Автор Г. А. Шайн.

ника становится трудным. До сих пор этот путь не дал новых результатов, за исключением, может быть, случая α Кита, где спутник предполагался белым карликом типа В с абсолютной величиной около $+5$.

Наблюдения спектра или цвета слабых звезд с большим собственным движением не могут привести к быстрому возрастанию числа известных белых карликов, так как подавляющее большинство звезд со значительным собственным движением — красные карлики. К тому же, если белые карлики имеют абсолютную величину порядка $+10$ и больше, они могут быть обнаружены более или менее часто среди звезд 15 — 17 -й видимой величины, в то время как предельная величина звезд в каталогах собственных движений намного меньше. Некоторые статистические результаты относительно белых карликов мы можем надеяться получить из подсчетов звезд различных цветов в высоких галактических широтах. Благодаря малой глубине галактической системы нормальные белые звезды будут быстро исчерпаны при приближении к видимо более слабым звездам и, наоборот, белые карлики должны начать встречаться. Известно, что функция $A(m)$, дающая число звезд видимой величины между $m - \frac{1}{2}$ и $m + \frac{1}{2}$, имеет максимум для звезд типа В и А в высоких галактических широтах. Если функция светимости белых звезд имеет, благодаря наличию белых карликов, второй максимум около $+10^m$ (более высокий, чем максимум нормальных белых звезд около $+1^m$), то у функции $A(m)$ следует ожидать второй максимум, более высокий, чем первый, на расстоянии от него приблизительно 9 величин. Например, подсчеты звезд типа А в галактической широте около 50° , выполненные Ван-Райном и Швассманном, приводят к максимуму $A(m)$ около $m=11$ [3]. Тогда следует, что второй максимум должен быть наблюден около $m=20$. Фактически, вероятно начиная уже от $m=17$, второй подъем кривой $A(m)$ должен проявляться. К сожалению, нет наблюдательных данных для проверки этого вывода, связанного с гипотезой изобилия белых карликов. Ясно, что наблюдения SI слабых звезд в высоких галактических широтах крайне желательны.

Можно предложить, однако, другой, вероятно более эффективный, путь, который может привести к открытию белых карликов. Пусть звезды, цвет которых мы наблюдали, расположены в направлении, где имеется значительное межзвездное избирательное поглощение. Тогда, относительно каждой слабой белой звезды, например 15^m или слабее, мы будем иметь альтернативу: или эта звезда — нормальная белая звезда на расстоянии нескольких тысяч парсек, или она белый карлик. Но первая гипотеза должна быть от-

вергнута, так как на таком расстоянии избыток цвета велик, и звезда не может быть белой. Поэтому слабые белые звезды, наблюдаемые в направлении, где пространственное покраснение твердо установлено, вероятно, должны быть белыми карликами. Предельная видимая величина для нормальных белых звезд в рассматриваемой области зависит от величины избытка цвета на 1000 *парсек*.

2. Имеется мало наблюдательных данных, которые могут быть подвергнуты испытанию для этой цели. Мы рассмотрим главным образом *CI* звезд в Щите, наблюдаемые Кригером (шесть полей в области между $18^{\text{h}}38^{\text{m}}.1$ и $18^{\text{h}}56^{\text{m}}.1$ по α и $-6^{\circ}20'$ и $-9^{\circ}42'$ по δ [4]).

Мы имеем следующие доказательства в пользу заметного избирательного поглощения в рассматриваемой области.

1) В каталоге Стеббинса и Хаффера [5] звезд типа В мы нашли следующие звезды в этой области:

<i>HD</i>	<i>l</i>	<i>b</i>	<i>CE</i>	Расстояние
167971	345°	1.5	0.44	870
169033	346	0.5	0.04	150
169454	345	-0.8	0.52	630
169753	349	1.0	0.35	520
170714	353	1.5	0.21	300
170740	348	-0.8	0.23	210
176162	349	-7.8	0.01	140
179406	355	-9.0	0.13	170

Приводя избытки цветов к расстоянию 1000 *парсек*, мы получим для избирательного поглощения величину, в среднем равную $+0^{\text{m}}.61$. Стеббинс и Хаффер дают $+0^{\text{m}}.67$ для долготы 350° и $+0^{\text{m}}.22$ для $l = 10^{\circ}$.

Долгота рассматриваемой области находится приблизительно в пределах $352-356^{\circ}$.

2) Тремплер [6], в своем исследовании звездных скоплений, используя определенные Шепли показатели цвета 46 звезд типов В8—А2 в М11, для которых он наблюдал спектры, дает избыток цвета $+0^{\text{m}}.65$ или на 1000 *парсек* $+0^{\text{m}}.48$. Однако мы должны помнить, что *CI* звезд Шепли в галактических облаках в общем не согласуются с избирательным поглощением, так как наблюдаемые *CI* уменьшаются с возрастанием звездных величин [7].

3) Основываясь на *CI* Кригера для 20 ярких звезд типа А0, мы были в состоянии вывести коэффициент избирательного поглощения γ из равенства $CI = (CI) + \gamma R$, где *CI* — наблюдаемый показатель цвета для каждой звезды, (CI) — показатель цвета, не подверженный

избирательному поглощению, R — расстояние в килопарсеках. Мы нашли $\gamma = 0.45 \pm 0.13$ в системе CI Кригера или 0.35 в системе Маунт Вилсона. Несмотря на согласие с предшествующими результатами, должно быть подчеркнуто, что вышеуказанная величина γ определена из очень малого числа звезд.

4) Когда имеется заметное избирательное поглощение, система CI , основанная на далеких звездах, очевидно, должна отличаться от системы, полученной по близким звездам. Одно из следствий этого — смещение верхнего предела CI к большим величинам. Ниже, в табл. 1 (тождественной с табл. 21 Кригера), даны числа звезд на 0.1 квадратном градусе, исправленные за дисперсию, обусловленную ошибками наблюдений CI .

Таблица 1

m	CI													
	< -0.60	-0.60 до -0.35	-0.35 до -0.10	-0.10 до $+0.15$	$+0.15$ до $+0.40$	$+0.40$ до $+0.65$	$+0.65$ до $+0.90$	$+0.90$ до $+1.15$	$+1.15$ до $+1.40$	$+1.40$ до $+1.65$	$+1.65$ до $+1.90$	$+1.90$ до $+2.15$	$+2.15$ до $+2.40$	> 2.40
< 10.0		0.2					0.2		0.2					
10—11	0.2		0.6	0.8		0.4		0.6	0.4	0.3				
11—12			0.5	1.2	1.3	0.8					0.2	0.2		
12—13	0.2		1.4	3.0	2.8	1.9	1.0	0.1	0.4	0.4	0.2			
13—14	0.7		0.9	6.0	9.2	8.5	3.3	1.9	1.4	2.5	0.3		0.4	0.4
14—15				4.3	33.3	41.6	15.7	7.0	13.3	8.7	7.3	2.6	1.1	
15—16				2.0	9.7	28.6	75.1	74.8	13.5	37.6	31.1	21.4		
16—17					2.0	25	275	202	8	24	39	22	29	23
17—18		(6)	(17)			24	303	323	260	32	54	56	38	30

Диаграмма видимая звездная величина—цвет сходна с диаграммой Герцшпрунга-Рессела с хорошо развитой главной последовательностью и ветвью слабых гигантов, как это должно было ожидаться в ограниченном объеме пространства. Если мы предположим, что звезды в подавляющем большинстве принадлежат облаку на расстоянии 1500 парсек (Тремплер, Кригер), мы найдем, что абсолютная величина звезд с видимой звездной величиной $16-18$ будет $5-7^m$ (карлики типа $G-K$). Число гигантов позднего типа, проектирующихся на эту область, очевидно очень мало. В самом деле, известно, что пространственная плотность нормальных звезд типа A не меньше, чем гигантов типа G и K . По этой причине, наряду с большим числом гигантов позднего класса не должно ожидаться малое число звезд типа A той же видимой величины. В настоящем случае число звезд типа A

(судя по цвету) очень мало и поэтому слабые красные звезды в подавляющем большинстве карлики типов G — K.

CI Кригера для карликов dG0, dG5 и dK0 равны соответственно +0.75, 1.02 и 1.38. Далее известно, что CI звезд типа M вообще отличаются, но мало, от CI звезд типа K (в некоторых системах CI даже уменьшаются для типа M). Из табл. 1 (которая исправлена за дисперсию, обусловленную наблюдательными ошибками CI) следует, что имеется большое число карликов со значительным избытком цвета. Здесь мы имеем около 17% звезд с $CI > 1.65$ среди звезд 15—18^m. Даже учитывая реальную дисперсию CI для данного спектрального класса и допуская слабое влияние гигантов позднего класса (CI для gK0 = 1.91), мы должны заключить, что смещение верхнего предела CI реально. Избирательное поглощение для красных звезд грубо может быть оценено равным 0^m.5. Это представляет интерес с той точки зрения, что доказательства в защиту избирательного поглощения до сих пор обычно основываются на звездах типа В. Благодаря особенностям цветовых температур этих звезд, это кажется в известной степени неполным доказательством. Если рассматриваемое смещение для слабых красных звезд может считаться реальным, то мы имеем здесь независимое доказательство в пользу избирательного поглощения. Смещение верхнего предела CI было ясно показано также в других сериях наблюдений CI . Например, Сирс и Джойнер нашли избышек слабых красных звезд с аномальными CI в S.A. 40 [8]. Сирс предполагает, что слабые звезды его таблицы — карлики типов G и K, для которых CI в системе Маунт Вилсона равны +0.99 и +1.48 соответственно. Число звезд с $CI > 1.8$ среди звезд с видимой величиной 14—16^m достигает около 30%. К тому же, нормальный максимум в системе Маунт Вилсона для CI равен около +1.9, а максимум, наблюдаемый Сирсом для S.A. 40, превосходит 2.8 или, по крайней мере, 2.6. Тогда следует, что избыток цвета около 0^m.7 для слабых красных звезд 14—16-й видимой величины может быть приписан избирательному поглощению. Результаты Сирса кажутся более убедительными, так как здесь мы гарантированы от значительной ошибки в шкале и в нуль-пункте для слабых звезд.

К такому же эффекту приводят также наблюдения CI Л. Слокум [9]. Среди слабых звезд имеется значительное число с $CI > 2.5$. Несмотря на то, что CI для dG0 и dK0 равны +1.09 и +1.54, среди звезд видимой звездной величины 14.5—15.5, 15.5—16.5, 16.5—17.5 и > 17.5 мы имеем соответственно 11, 18, 26 и 28 процентов звезд с $CI > 1.75$. В этих подсчетах мы использовали таблицы V_a и V_b (l. c.) Слокум, уже исправленные за дисперсию, обусловленную ошибками наблюдений CI . Все эти данные, вместе взятые, дают хорошее доказатель-

ство в пользу покраснения слабых красных звезд, обусловленного избирательным поглощением.

5) Область, охватывающая наблюдения Кригера и Слокум, входит в хаббловскую зону избегания внегалактических туманностей. На пластинке с центром $l = 350^\circ$ и $b = -5^\circ$ Хаббл не нашел ни одной внегалактической туманности.

6) Галактическая широта площадки А Кригера равна -3° (подсчеты Кригера основаны главным образом на этой площадке). Почти на той же широте -6° расположено слабое шаровое скопление NGC 6712 с избытком цвета около $+0^m 30$. Кажется невероятным, что для меньшей широты (-3°) — избыток цвета уменьшается или даже остается постоянным. По этой причине, для далеких звезд в площадке А должен ожидаться избыток цвета больший, чем $0^m 30$.

Что касается наблюдений Слокум, то должно быть отмечено, что кроме доказательств в пользу избирательного поглощения, упомянутых выше, имеется вычисление коэффициента избирательного поглощения, выполненное Слокум, основанное на звездах типов А и F (в системе CI Маунт Вилсона $\gamma = 0.34 \pm 0.03$).

Далее, для рассматриваемых площадок можно вывести [1] из работы Стеббинса и Хаффера следующие величины для избирательного поглощения: S.A. 64: $+0.19$, S.A. 18: $+0.31$, S.A. 19: $+0.40$, S.A. 8: $+0.43$ и S.A. 9: $+0.43$.

3. Все рассмотренные выше доказательства не оставляют сомнения, что в рассматриваемых направлениях действительно имеется заметное пространственное покраснение, и поэтому здесь мы можем попытаться применить метод нахождения белых карликов, упомянутый во введении. В этом аспекте кажется соблазнительной маленькая изолированная группа слабых белых звезд в левом нижнем углу табл. 1, данные о которых основаны на наблюдениях Кригера. Ниже* приводятся слабые звезды, не ярче чем $13^m 5$ с отрицательным CI, большим, чем -0.10 .

S.A. 40 (обсужденная Сирсом и Джойнером), очевидно, свободна от слабых белых звезд, за исключением двух звезд между 13.0 и 13.5 с CI около $+0.3$. К несчастью, предельная величина рассматриваемых звезд равна $15^m 7$.

Не переоценивая точность CI слабых звезд и принимая в расчет возможность больших случайных ошибок (несмотря на двойные измерения для большинства звезд) должен быть подчеркнут особый характер табл. 1 или табл. 12—21 Кригера. Изолированное положение слабых белых звезд на диаграмме звездная величина — цвет, не

* На стр. 137—Ред.

исправленное, так же как и исправленное за дисперсию, обусловленную наблюдательными ошибками, кажется сходным с положением белых карликов на диаграмме Герцшпрунга-Рессела. Если звезды в нижнем левом углу — нормальные звезды типа А0—А5 ($M = +1$), то их

Кригер			Слокум		
№	$m_{\text{фот}}$	CI	№	$m_{\text{фот}}$	CI
A 2009	17.21	-0.40	Площадка 18.М.В. 123	17.61	< 0
A 2057	16.98	-0.28	" 518	15.80	-0.17
A 2177	16.28	-0.34	" 530	16.31	-0.59
A 2497	16.98	-0.29	" 667	16.65	-0.21
B 8	13.59	-0.69	" 733	14.49	-0.43
B 20	14.30	-0.14	"		
B 38	14.39	-0.51			
B 83	14.30	-0.16			
E 46	14.50	-0.21			

расстояние должно быть порядка 15000 *парсек*. В этом случае очень трудно понять, как они могут сохранить отрицательный CI . Если же это близкие звезды, не подверженные серьезному избирательному поглощению, заключение об их карликовой природе неизбежно, и на расстоянии 100, 250 и 500 *парсек* их абсолютная величина должна быть соответственно равна +12, +10 и +8.5. Среди белых звезд также мало наблюдается звезд 13-й величины. Даже в этом случае избыток цвета для нормальных белых звезд должен быть значительным. Если мы здесь имеем дело с белыми карликами, то расстояние их меньше, чем 100 *парсек*, если только они абсолютно не ярче 8^m .

Наблюдательные данные Кригера и Слокум для звезд с известными спектрами позволяют определить дисперсию CI для данного спектрального подразделения. Она состоит из реальной дисперсии и дисперсии, обусловленной ошибками наблюдений. Не разделяя эти составные части, мы вывели из CI Кригера среднюю квадратичную ошибку одного наблюдения для А0 ± 0.19 , А2 ± 0.15 и А5 ± 0.23 , или в среднем ± 0.19 . Предполагая нормальный закон распределения для остаточных разностей, мы можем подсчитать вероятность того, что из 17 звезд с CI между +0.15 и +0.40 (см. табл. 18, 1.с. Кригера) 4 звезды приобретут отрицательный CI между -0.10 и -0.60. Эта вероятность меньше 0.001. Предполагая, что средняя квадратичная ошибка равна +0.28 (1,5 раза наблюдаемой величины), мы нашли, что рассматриваемая вероятность меньше 0.01. Но дисперсия в наблюдении

ных величинах CI не только обусловлена ошибками наблюдений, и в таком случае закон для остаточных разностей, вероятно, отличается от нормального закона ошибок. По этой причине вычисленная вероятность может быть оспариваема. Однако остается очень значительная вероятность, что накопление слабых белых звезд в нижнем левом углу табл. 1 не обусловлено случайностью.

Средняя квадратичная ошибка для CI Слокум несколько больше, а именно $+0,27$, и вероятность, что наблюдаемые отрицательные CI обусловлены случайностью, больше, чем вышеуказанная, но все еще мала.

Для того, чтобы объяснить присутствие слабых белых карликов в рассматриваемых областях, могут быть предложены две гипотезы. Или наблюдаемые белые звезды 16—18-й видимой величины — белые карлики, или избирательно поглощающая среда в направлении Щита и других рассматриваемых областей кончается на расстоянии 1500—2000 *парсек*, и по этой причине избыток цвета не увеличивается при переходе от звезд 11—12^m к видимо более слабым звездам. Система CI Кригера для белых звезд была установлена для звезд с расстоянием около 1000—1500 *парсек*, и по этой причине, в случае последней гипотезы, CI для далеких звезд за облаком могут быть очень малы. Но это, вообще, не применимо к звездам Слокум, так как ее Система CI свободна или почти свободна от эффекта избирательного поглощения. Однако присутствие многих отрицательных CI в табл. 1 говорит в пользу первой гипотезы, так как белые карлики типов А—F в системе CI Кригера, подвергнутые поглощению, будучи сравнительно близкими, должны иметь именно отрицательные CI . Но если эти звезды действительно являются белыми карликами, то возникает другое затруднение: присутствие слишком большого числа белых карликов в наблюдаемой области. Основываясь на этих подсчетах, мы получаем слишком большую пространственную плотность для белых карликов. Не фиксируя значение абсолютной величины этих звезд, трудно оценить пространственную плотность, но, вероятно, она не менее чем в десять раз больше, чем плотность белых карликов в нашей окрестности. Правда, вероятно, что не все белые карлики в нашей окрестности известны.

Что касается второй гипотезы, мы не в состоянии отвергнуть ее. Однако должно быть отмечено, что если пространство за облаком в Щите было бы прозрачным от 1500 до 15000 *парсек*, то число белых звезд ярче $m = 18$ на квадратном градусе составляло бы несколько тысяч или еще больше, так как трудно допустить, что в направлении, так близком к направлению на галактический центр, пространственная плотность звезд сильно уменьшается с увеличением расстояния от Солн-

ца. Поэтому в этом направлении, несомненно, имеется по крайней мере общее поглощение, и это находится в согласии с совпадением рассматриваемой области с зоной избегания внегалактических туманностей Хаббла. Вторая гипотеза может быть переделана в таком смысле, что до расстояния около 1500 *парсек* имеется общее и избирательное поглощение, а за облаком остается только значительное общее поглощение, без следов избирательного поглощения. Но это предположение кажется слишком искусственным.

Наконец, не исключена возможность, что белые звезды видны в малых площадках, где пространственное покраснение достигает минимума (просветы и трещины в поглощающем облаке). Неравномерности поглощения говорят в пользу этой точки зрения. Так, на рассматриваемой долготе (около 350°) и на широте — 5° не имеется ни одной внегалактической туманности, в то время как на широте — 6° наблюдается далекое шаровое скопление *NGC 6712*. (Правда, однако, с избытком цвета + 0.30). Но трудно думать, что такие трещины часто встречаемы на широте — 3° .

Однако только измерения собственных движений и подтверждение отрицательных величин *CI* рассматриваемых звезд дадут проверку без какой-либо неопределенности гипотезы белых карликов. В общем очевидно, что изучение слабых белых звезд в низких галактических широтах даст очень ценные сведения о природе самих этих звезд, так же как и о распределении поглощающей среды в пространстве.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kuiper, *PASP* **46**, 287, 1934; *PASP* **47**, 96, 1935.
2. Adams and Humason, *PASP* **47**, 52, 1935.
3. *Z. f. Ap.* **10**, 169, 1935.
4. *LOB*, **14**, 97.
5. *Publ. Washb. Obs.* XV, part 5, 1934.
6. *LOB*, **14**, 165, 1930.
7. *Ap. J.* **46**, 64, 1917.
8. *PASP*, **43**, 57, 1931.
9. *LOB*, 434.

Примечание. Метод обнаружения белых карликов, предложенный авторами настоящей статьи, получил широкое применение лишь в самое последнее время и оказался весьма эффективным. К сожалению, точность определения показателей цвета в работах, использованных авторами, была недостаточна для окончательного суждения о карликовой природе рассматривавшихся белых звезд. Именно поэтому окончательные выводы авторов о природе конкретных звезд оказались не вполне однозначными.

Применение метода, произведенное за последнее время, так же как и другие работы по белым карликам, полностью подтвердили вывод авторов об огромном количестве белых карликов в Галактике.

Однако основная ценность работы заключается в предложенном методе обнаружения белых карликов.

ДВОЙНЫЕ ЗВЕЗДЫ И КОСМОГОНИЧЕСКАЯ ШКАЛА ВРЕМЕНИ*

В недавней заметке [1] сэра Джеймс Джинс выдвинул аргументы в пользу равного распределения (equipartition) энергии в орбитальном движении двойных звезд. Как им было указано, существование равного распределения должно противопоставляться „короткой шкале времени“ Вселенной. Некоторые замечания об этом интересном предмете, по-видимому, не являются излишними.

(1). Аргумент, что число орбит, эксцентриситеты которых меньше, чем ϵ , будет пропорционально просто ϵ^2 , справедлив не только в случае равного распределения, но также в более общем случае, когда плотность в фазовом пространстве является произвольной функцией от полной энергии двойной системы.

(2). Если пертурбации от прохождений других звезд ответственны за распределение эксцентриситетов двойных звезд с известными орбитами, они должны быть также достаточны для установления равного распределения между двойными звездами с более далекими компонентами ($r_{AB} > 100$ астр. единиц). Легко видеть, что в этом случае

фактор Больцмана $e^{-\frac{u}{6}}$ приблизительно равен единице и относительное число двойных звезд с расстояниями между составляющими, заключенными в пределах r и $r + dr$, будет пропорционально просто $r^{\frac{1}{2}} dr$. Однако Эпик [2] в своей ценной работе показал, что это число пропорционально dr/r . Следовательно, распределение далеких составляющих не находится в согласии с гипотезой долгой шкалы времени.

(3) В случае долгой шкалы времени мы должны ожидать существования некоторого рода диссоциативного равновесия между широкими двойными и одиночными звездами. Легко вычислить, что теоретическое отношение числа широких пар и одиночных звезд при диссоциативном равновесии во много тысяч раз меньше наблюдаемого

* Double Stars and the Cosmogonic Time-Scale. Nature, **137**, No 3465, 537, 1936.

отношения. Следовательно, для широких пар диссоциативное равновесие еще не достигнуто.

Мы можем сделать вывод, что наблюдательные данные астрономии двойных звезд не подтверждают гипотезу долгой шкалы времени.

Астрономическая обсерватория,
Университет, Ленинград
21 февраля

Л И Т Е Р А Т У Р А

- 1 Nature, **136**, 432, 1935.
2. Tartu Observatory Publications, **25**, 1924.

Примечание. Непосредственно после этого письма В. А. Амбарцумяна в журнале „Nature“ был опубликован следующий ответ Дж. Джинса:

„Проф. Амбарцумян, кажется, неправильно понял мою основную точку зрения. Я не был намерен утверждать, что равное распределение на самом деле существует — аргументы (2) и (3) проф. Амбарцумяна достаточны для опровержения этого — но что в некоторых отношениях имеется допустимо хорошее приближение к равному распределению. Для достижения идеального равного распределения, конечно, потребовалось бы бесконечное время; для достижения наблюдаемого приближения требуется время порядка 10^{13} лет. Я не могу видеть, что замечания проф. Амбарцумяна каким-либо образом подвергают сомнению эту позицию, так что, как мне кажется, упомянутые им наблюдательные данные не противопоставляются долгой шкале времени в 10^{13} лет, а только бесконечно долгой шкале времени“.

Подробное статистическое исследование двойных звезд (вместе с разбором ответа Джинса) дано В. А. Амбарцумяном в следующей статье настоящего сборника.

К СТАТИСТИКЕ ДВОЙНЫХ ЗВЕЗД*

Наблюдаемое распределение эксцентриситетов среди двойных звезд с известными орбитами далеко не доказывает (вопреки мнению Джинса) наличия равного распределения энергий среди них. Прямое рассмотрение распределения внутренних энергий звездных пар (больших полуосей орбит) доказывает, наоборот, что равное распределение энергий не наступило даже среди широких пар. Это обстоятельство вместе с отсутствием диссоциативного равновесия между двойными и одиночными звездами приводит к возрасту совокупности двойных звезд не свыше 10^{10} лет.

Рядом авторов было указано, что изучение закона распределения элементов орбит двойных звезд, а также других статистических зависимостей для этих объектов может дать интересные результаты для космогонии вообще и для решения вопроса о возрасте нашей звездной системы в частности**. Однако, как было указано автором в одной предварительной заметке [1], часто из наблюдательных данных делаются ошибочные выводы. Цель настоящего исследования — показать неправильность некоторых старых выводов, получивших довольно широкое распространение в литературе [2], и указать на некоторые новые следствия из наблюдательного материала, касающегося двойных звезд.

1. Распределение эксцентриситетов орбит двойных звезд

Из наблюдаемых закономерностей довольно часто дискутируется вопрос о распределении эксцентриситетов орбит. Именно, установлено, что среди двойных звезд с определенными орбитами число пар с эксцентриситетами, меньшими чем ϵ , пропорционально ϵ^2 .

С другой стороны, Джинс показал, что при статистическом равновесии (больцмановское распределение) должна соблюдаться та же зависимость. Отсюда делаются заключения о том, что мы уже имеем дело с наиболее вероятным распределением, что приводит не-

* Астр. Ж. 14, 207, 1937.

** Повсюду в настоящей статье речь идет о возрасте нашей звездной системы а не о возрасте Вселенной в целом.

посредственно к долгой шкале времени. Согласно более осторожной формулировке Джинса, приведенной в ответе на предварительную заметку автора [3], равное распределение энергий (equipartition) установилось по крайней мере в некоторых отношениях.

Прежде всего нужно четко понять, что приведенное распределение эксцентриситетов может в значительной степени отличаться от действительного вследствие селективности наблюдательного материала. Нам известны пока лишь орбиты пар со сравнительно короткими периодами. С другой стороны, средний эксцентриситет, как указывают наблюдения, несомненно возрастает с периодом. Поэтому на самом деле относительное число всех пар с большими эксцентриситетами больше, чем относительное число этих пар среди двойных звезд с известными орбитами.

Для внесения ясности в рассматриваемый вопрос с теоретической стороны рассмотрим распределение состояний спутников в фазовом пространстве. При этом координатами в фазовом пространстве пусть служат три компоненты положения спутника и три компоненты его импульса, отнесенные к главной звезде. При статистическом равновесии мы должны иметь, что число спутников dN в элементе объема $dx dy dz dp_x dp_y dp_z$ фазового пространства равно

$$dN = Ce^{-\frac{E(x, y, z, p_x, p_y, p_z)}{\theta}} dx dy dz dp_x dp_y dp_z, \quad (1)$$

где

$$E = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \frac{\gamma Mm}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (2)$$

есть энергия спутника, а M и m — массы главной звезды и спутника, γ — гравитационная постоянная, а θ — модуль больцмановского распределения.

Рассмотрим, однако, вместо этого наиболее вероятного распределения значительно более общий тип распределения, когда плотность в фазовом пространстве имеет не специальный вид $Ce^{-\frac{E}{\theta}}$, а является произвольной заданной функцией $f(E)$ энергии E . Тогда

$$dN = f(E) dx dy dz dp_x dp_y dp_z.$$

Произведем теперь в фазовом пространстве канонические преобразования, перейдя от переменных x, y, z, p_x, p_y и p_z к переменным лунной теории Делонэ [4]: L, G, H, l, g и h . Что касается первых трех из этих величин, то они выражаются через обычные элементы эллип-

тического движения: большую полуось a , наклонность i и эксцентриситет ε следующим образом:

$$L = m \sqrt{\gamma M a^3},$$

$$G = m \sqrt{\gamma M a^3 (1 - \varepsilon^2)^{1/2}},$$

$$H = m \sqrt{\gamma M a^3 (1 - \varepsilon^2)^{1/2}} \cos i.$$

Угловые же координаты l , g и h представляют собой соответственно не что иное, как среднюю аномалию, расстояние периастрия до узла и долготу восходящего узла.

Как известно, при каноническом преобразовании в фазовом пространстве элемент объема сохраняет свою величину (якобиан преобразования равен единице). Иными словами:

$$dx dy dz dp_x dp_y dp_z = dL dG dH dl dg dh.$$

С другой стороны,

$$E = - \frac{\gamma^2 M^2 m^3}{2L^2} = - \frac{1}{2} \frac{\gamma M m}{a},$$

т. е. энергия зависит только от элемента L . Следовательно, в нашем случае и плотность в фазовом пространстве зависит только от L , и мы можем написать:

$$dN = f(L) dL dG dH dl dg dh.$$

Отсюда следует, что число пар, у которых L заключено между L и $L + dL$, а G больше некоторого заданного значения G_0 , равно:

$$8\pi^3 f(L) dL \int_{G_0}^L dG \int_0^G dH,$$

так как l , g и h меняются независимо друг от друга от 0 до 2π , H принимает значения от 0 до G и G по своему определению меняется от 0 до L . Написанное выражение поэтому равно:

$$4\pi^3 f(L) (L^2 - G_0^2) dL,$$

но

$$L^2 - G_0^2 = m^2 \gamma^2 M^2 a \varepsilon_0^2 = L^2 \varepsilon_0^2,$$

где ε есть эксцентриситет, соответствующий орбите, с данными L и $G = G_0$.

Итак, число звезд с $\varepsilon < \varepsilon_0$ (т. е. $G > G_0$) и L , заключенным в пределах между L и $L + dL$, равно

$$4\pi^3 f(L) L^2 \varepsilon_0^2 dL,$$

откуда следует, что число всех орбит, для которых $\varepsilon < \varepsilon_0$, равно:

$$N(\varepsilon_0) = 4\pi^3 \varepsilon_0^2 \int_0^{\infty} f(L) L^2 dL. \quad (3)$$

Интеграл в правой части есть постоянное число, и поэтому мы получаем следующую теорему:

Если плотность в фазовом пространстве есть произвольная функция от L , т. е. от полной энергии и только от этой величины, то число всех звезд с эксцентриситетами, меньшими, чем ε_0 , пропорционально ε_0^2 .

Отсюда следует, что если даже считать, что наблюдаемое $N(\varepsilon_0)$ тоже пропорционально ε_0^2 (хотя, как указывалось выше, селективность материала заставляет сильно сомневаться в этом), то отсюда вовсе нельзя заключить, что фазовая плотность пропорциональна $e^{-\frac{E}{\theta}}$, т. е. что имеет место равное распределение энергий. Наоборот, при любом распределении энергий при условии лишь, что фазовая плотность не зависит от других элементов, мы должны иметь $N(\varepsilon) \sim \varepsilon^2$.

Таким образом, даже если принять, что в действительности $N(\varepsilon_0) \sim \varepsilon_0^2$, все же отсюда нельзя делать заключений о равном распределении энергий, а тем более о продолжительности жизни звездной системы.

Заслуживает, однако, внимания следующее обстоятельство. Согласно предыдущему, в случае, когда фазовая плотность зависит только от L (т. е. от E , или, что то же, от большой полуоси), для каждого интервала dL мы имеем, что число орбит с эксцентриситетами, меньшими, чем ε_0 , тоже должно быть пропорционально ε_0^2 или, что число орбит с эксцентриситетами, заключенными между ε и $\varepsilon + d\varepsilon$, должно быть пропорционально $\varepsilon d\varepsilon$ независимо от a . Поэтому и среднее значение эксцентриситета для каждого интервала величины большой полуоси

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\int_0^1 \varepsilon^2 d\varepsilon}{\int_0^1 \varepsilon d\varepsilon} = \frac{2}{3} \quad (4)$$

не должно зависеть от a , а должно быть равно двум третям. Наблю-

дательный материал находится в противоречии с этим. На это указывает следующая таблица, полученная Эйткеном [5]:

\bar{P}	$\bar{\varepsilon}$	n
16.8 лет	0.43	14
37.1	0.40	24
73.0	0.53	24
138	0.57	23
200	0.62	18

В этой таблице даны средние значения эксцентриситетов для звезд, сгруппированных по периодам. В первом столбце дан средний период каждой группы, а в последнем — число звезд в группе. Если к этой таблице присоединить еще статистический результат Ресселла о том, что для звезд с периодами около 5000 лет средний эксцентриситет равен 0.76, то мы должны заключить, что ε зависит от P . Известно, что $P \sim L^3$. Поэтому $\bar{\varepsilon}$ зависит от L . Совершенно очевидно, что основное допущение, сделанное выше, неверно, и фазовая плотность зависит не только от большой полуоси. Значит, не только нельзя говорить, что фазовая плотность пропорциональна $e^{-\frac{E}{\theta}}$, но вообще нельзя считать, что она зависит только от энергии. Впрочем, имеются указания, что приведенная зависимость $\bar{\varepsilon}$ от P сильно подвержена действию наблюдательной селекции [10, 11, 12].

Впрочем, возможно, что для далеких компонент ($P > 100$ лет) изменение $\bar{\varepsilon}$ мало, и что для них фазовая плотность зависит только от E . Поэтому интересно, на какую зависимость фазовой плотности от E указывают наблюдения и насколько существующая зависимость близка к бoльцмановской.

2. Вывод фазовой плотности из наблюдательных данных

В настоящем параграфе мы допустим, что фазовая плотность зависит только от E , и постараемся получить из эмпирического материала форму этой зависимости. Мы видели, что по крайней мере для малых L фазовая плотность, возможно, зависит и от других элементов. Поэтому полученный нами результат нужно будет трактовать лишь как результат усреднения по другим элементам. Даже в таком виде наш вывод будет иметь некоторую ценность, тем более, что для далеких компонент наше допущение вероятно справедливо. Итак, пусть фазовая плотность равна $f(L)$. Это значит, что в элементе объема $dx dy dz dp_x dp_y dp_z$ число звезд будет равно:

$$f\left(\gamma M m \sqrt{\frac{\frac{m}{2Mm\gamma} p^2}{r} \frac{p^2}{m}}\right) dx dy dz dp_x dp_y dp_z,$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}.$$

Поэтому плотность распределения в обычном пространстве равна:

$$\begin{aligned} \rho &= \iiint f\left(\gamma M m \sqrt{\frac{\frac{m}{2Mm\gamma} p^2}{r} \frac{p^2}{m}}\right) dp_x dp_y dp_z = \\ &= 4\pi \int_0^{\frac{m}{\sqrt{\frac{2M\gamma}{r}}}} f\left(\gamma M m \sqrt{\frac{\frac{m}{2Mm\gamma} p^2}{r} \frac{p^2}{m}}\right) p^2 dp. \end{aligned}$$

Под „распределением в обычном пространстве“ здесь понимается пространственное распределение всех спутников, когда главные звезды все совмещены в одной точке. Верхний предел интегрирования в последнем интеграле получается из условия, что мы рассматриваем только физические спутники, двигающиеся по эллиптическим орбитам, т. е. такие системы, у которых полная энергия отрицательна.

Введем теперь в последнем интеграле вместо p переменную интегрирования

$$L = \gamma M m \sqrt{\frac{\frac{m}{2Mm\gamma} p^2}{r} \frac{p^2}{m}}.$$

Мы получим

$$\rho(r) = \int_{m \sqrt{\frac{\gamma M}{2}} r^{1/2}}^{\infty} f(L) \sqrt{\frac{2Mm^2\gamma}{r} \frac{\gamma^2 M^2 m^4}{L^2} \cdot \frac{4\pi^2 \gamma^2 M^2 m^4 dL}{L^3}}.$$

Если обозначим

$$K = m \sqrt{\frac{\gamma M}{2}} \cdot r^{1/2},$$

то

$$\rho(r) = 4\pi^2 \gamma^3 M^3 m^6 \int_K^{\infty} f(L) \sqrt{\frac{1}{K^2} - \frac{1}{L^2}} \frac{dL}{L^3},$$

или

$$\rho(K) = C \int_K^{\infty} f(L) \sqrt{L^2 - K^2} \frac{dL}{KL^4}. \quad (5)$$

Пользуясь этим интегральным уравнением, мы можем по известной плотности в обычном пространстве ρ найти фазовую плотность $f(L)$. В известном исследовании Элик [6] показал, что имеющийся наблюдательный материал, будучи исправлен за наблюдательную селекцию, дает:

$$\rho \sim \frac{1}{r^3}, \quad (6)$$

или

$$\rho \sim \frac{1}{K^6}.$$

Очевидно, что при этой специальной форме функции ρ уравнение (5) удовлетворится функцией

$$f(L) \sim \frac{1}{L^3}. \quad (7)$$

Сравним теперь эту „наблюденную“ плотность в фазовом пространстве с той, которая должна быть при статистическом равновесии. При статистическом равновесии мы должны иметь:

$$f(L) = Ce^{-\frac{E}{\theta}} = Ce^{-\frac{1^2 M^2 m^2}{rL^2 \theta}}. \quad (8)$$

Мы видим, что для выяснения вопроса нужно знать значение θ . Если совокупность двойных звезд пришла в статистическое равновесие в результате сближений с другими звездами, то θ должно быть порядка двух третей средней кинетической энергии поступательного движения окружающих звезд. Если примем, что средняя скорость поступательного движения звезд порядка 25 км/сек, то уже при $a > 20$ А. У. показатель в правой части формулы (8) очень мал по сравнению с единицей. Поэтому для всех больших значений L (а тем самым и a) мы с большой степенью приближения можем переписать (8) в виде:

$$f(L) = \text{const}. \quad (9)$$

Между тем результат, полученный Эпиком, относится именно к далеким компонентам. Поэтому (7) относится именно к большим значениям L .

Мы видим, что „наблюденная“ фазовая плотность (7) меняется по закону, резко отличному от того, который имеет место при статистическом равновесии (9).

Можно показать, что „распределение в обычном пространстве“ для случая статистического равновесия тоже резко отличается от

наблюденного. В самом деле, из (9) и (5) следует, что при статистическом равновесии

$$\rho \sim \frac{1}{r^{3/2}} \quad (10)$$

в противоречии с наблюдаемым распределением (6). Разница между (10) и (6) настолько велика, что не может быть никакого сомнения, что (10) не соблюдается в действительности хотя бы с малой степенью приближения. Поскольку закономерность (3) установлена Эпиком именно для далеких компонент с расстоянием до 10 000 А. У., то мы заключаем, что даже для столь далеких компонент влияние сближений еще не привело к статистическому равновесию (т. е. к наиболее вероятному распределению) в распределении больших полуосей, т. е. энергий. Как мы увидим, это сильно уменьшает верхнюю границу для продолжительности жизни звездной системы.

3. Проверка эпиковского закона обратных кубов на новом наблюдательном материале

В настоящем параграфе мы рассмотрим один очень простой способ проверки полученного Эпиком закона (6) для „распределения компонент в обыкновенном пространстве“. Мы увидим, что совершенно новый метод анализа вопроса подтверждает приближенную правильность формулы (6).

Дело в том, что если компоненты распределены вокруг центральных звезд по закону $\frac{1}{r^n}$, где n — любое число, то распределение плотности в проекции на небесную сферу будет определяться законом $\frac{1}{r^{n-1}}$.

Если мы имеем некоторую совокупность двойных звезд с таким распределением, заключенную в некоторый элемент объема, и если этот элемент объема будет удаляться, то распределение видимых расстояний в проекции будет, очевидно, продолжать удовлетворять закону $\frac{1}{r^{n-1}}$. Суммирование таких распределений для различных элементов объема вдоль пути луча и по различным направлениям на небесной сфере приведет тоже к пропорциональности $\frac{1}{r^{n-1}}$. Поэтому для всего видимого распределения в проекции мы должны полу-

чить для сколь угодно большого участка неба тот же закон.

В частности в предположении альтернативы

$$\rho \sim \frac{1}{r^3} \quad \text{и} \quad \rho \sim \frac{1}{r^{3/2}}$$

мы должны получить для распределения плотностей в проекции

$$\rho \sim \frac{1}{r^2} \quad \text{и} \quad \rho \sim \frac{1}{r^{1/2}},$$

откуда следует, что число звезд с видимыми расстояниями, заключенными между r_2 и r_1 , должно быть пропорционально

$$\lg_e \frac{r_2}{r_1} \quad \text{и} \quad r_2^{3/2} - r_1^{3/2}. \quad (11)$$

Для решения вопроса были взяты все звезды до видимой величины 9.0, лежащие в северном полушарии, имеющиеся в каталоге Эйткена [7] (всего 4640 звезд). В этих пределах каталог Эйткена можно считать достаточно однородным, ибо все звезды до величины 9.0 были проверены на двойственность самим Эйткеном на Ликской обсерватории. В следующей табличке дается число пар с расстояниями от 0.5 до 1", от 1 до 2", от 2 до 4" и от 4 до 8". Во второй и третьей строке даются числа, пропорциональные соответственно $\lg_e \frac{r_2}{r_1}$ и $r_2^{3/2} - r_1^{3/2}$, причем коэффициент пропорциональности C выбран таким образом, чтобы общее число в каждой из трех строк было одним и тем же.

Интервал	0.5—1"	1—2"	2—4"	4—8"	Итого
Наблюдаемое число пар	883	1160	1283	1314	4640
$C \lg_e \frac{r_2}{r_1}$	1160	1160	1160	1160	4640
$C (r_2^{3/2} - r_1^{3/2})$	136	382	1080	3040	4638

Из этого сопоставления видно, что формула $C \lg_e \frac{r_2}{r_1}$ является известным (с точностью до 10%) приближением к наблюдаемым числам, в то время как формула $C (r_2^{3/2} - r_1^{3/2})$ ни в какой степени не оправдывается. Существующие отклонения от формулы $C \lg_e \frac{r_2}{r_1}$, несомненно, должны будут уменьшиться в случае исключения оптических пар.

Отсюда видно, что эпиковский закон $\rho \sim \frac{1}{r^3}$ в первом приближении подтверждается. Тем самым вновь показано, что энергии звездных пар распределены не по больцмановскому закону.

В ответ на предварительную заметку автора на рассмотренные выше темы Джинс признал [3], что равного распределения энергий не существует, но вслед за этим он добавил: „in certain respects there is a tolerably good approximation to equipartition“. В чем же Джинс видит хотя бы отдаленное приближение к „equipartition“ в области двойных звезд? После приведенных следствий из закона Эпика очевидно, что о каком бы то ни было приближении к equipartition не может быть и речи.

4. Время релаксации совокупности двойных звезд

Рассмотрим вопрос о времени, необходимом для того, чтобы совокупность двойных звезд, входящих в звездную систему, пришла бы в статистическое равновесие с окружающими звездами. Очевидно, что в состоянии статистического равновесия возможны два взаимно противоположных — взаимно компенсируемых — процесса: с одной стороны, должно происходить разрушение физических пар вследствие прохождения третьего тела и, с другой стороны, образование пар при сближении трех взаимно несвязанных звезд, причем третье тело уносит с собой избыток энергии, освободившейся в результате образования физической пары. Как мы увидим далее, в нашей звездной системе из-за отсутствия статистического равновесия полная взаимная компенсация этих процессов не происходит и притом в том смысле, что число образуемых пар ничтожно мало по сравнению с числом разрушаемых пар.

Наряду с разрушением пар могут происходить вследствие сближений с посторонними звездами и небольшие изменения энергии системы, которые могут, суммируясь, повлечь за собой и разрушение. Вот эти процессы изменения энергии (большой полуоси) вследствие сближений, а также разрушений пар и приводят к установлению статистического равновесия в смысле установления больцмановского распределения.

Очевидно, что среднее время разрушения звездной пары, которое мы сейчас вычислим, вполне достаточно для установления больцмановского распределения.

В самом деле, установление больцмановского распределения происходит путем изменений энергий, меньших, чем те, которые связаны с разрушением. Поэтому и необходимое для этого время не больше,

чем среднее время разрушения пары. Таким образом среднее время разрушения пары дает нам порядок „времени релаксации“ системы двойных звезд.

При наших вычислениях мы остановимся на „далеких парах“, т. е. на таких, у которых расстояние между компонентами превосходит 100 А. У. и в среднем порядка тысяч А. У.

Прохождения третьей звезды около звездной пары можно разделить на два типа: 1) прохождения, при которых минимальное расстояние проходящего тела до центра тяжести системы велико по сравнению с большой полуосью орбиты, 2) прохождения, при которых расстояние третьего тела до одной из компонент пары становится малым по сравнению с большой полуосью системы. Будем называть такие прохождения соответственно „далекими“ и „близкими“. Могут происходить так же прохождения и промежуточного типа, но мы на них останавливаться не будем, ибо они не имеют серьезного значения.

Уже Бор [8, 9] показал (рассматривая прохождение частицы, взаимодействующей по закону Кулона, мимо атома), что роль „далеких“ прохождений ничтожно мала по сравнению с ролью „близких“ прохождений. Поэтому мы рассмотрим только „близкие“ прохождения. Рассмотрение, вдобавок, еще „далеких“ прохождений может лишь несколько уменьшить время релаксации, не меняя его порядка.

Для пар рассматриваемого типа орбитальная скорость движения вокруг центра тяжести — порядка одного или самое большее нескольких (2—3) километров в секунду. Между тем относительные скорости в звездной системе вообще порядка 30 км/сек. Поэтому практически в координатной системе, связанной с центром тяжести, спутник может считаться почти неподвижным. Время, в течение которого проходящая звезда будет оказывать главную часть своего воздействия на спутник, будет ничтожно малым по сравнению с временем обращения пары как вследствие указанного малого отношения скоростей, так и вследствие „близости“ прохождения. Поэтому каждый раз в результате возмущения у спутника будет появляться добавочная кинетическая энергия при неизменной потенциальной энергии, т. е. будет происходить либо некоторое увеличение энергии (большой полуоси), либо полное разрушение пары. Таким образом, изменение энергии очевидно будет происходить всегда в сторону увеличения. Лишь в небольшом числе случаев, когда кинетическая энергия проходящей звезды по отношению к центру тяжести мала по сравнению с кинетической энергией спутника, мы можем иметь обратную картину. Но таких проходящих звезд будет сравнительно ничтожное число.

С другой стороны, описанные выше условия позволяют трактовать спутник как „свободный“, так как воздействие центральной звезды на

спутник сказывается лишь в течение промежутка времени, слишком большого по сравнению с продолжительностью столкновения. Таким образом задача сводится к вычислению изменения кинетической энергии спутника при его сближении с проходящей звездой в координатной системе, связанной с центром тяжести пары.

Простое вычисление показывает, что приращение энергии во время такого далекого прохождения равно:

$$\Delta E = \frac{mv^2}{2} \frac{1}{1 + \frac{p^2 v^4}{4m^2 \gamma^2}}, \quad (12)$$

если принять, что массы проходящей звезды и спутника одинаковы. Здесь p есть „параметр удара“, т. е. расстояние спутника от начальной прямой, по которой двигалась до сближения проходящая звезда. Число сближений, при которых параметр удара заключен между p и $p + dp$ за время dt и скорость проходящей звезды заключена между v и $v + dv$, равно:

$$2\pi p dp v dt dn,$$

где dn — число звезд в единице объема, скорости которых заключены между v и $v + dv$. Поэтому приращение энергии за время t будет равно:

$$\pi t \int m v^3 dn \int \frac{p dp}{1 + \frac{p^2 v^4}{4m^2 \gamma^2}};$$

интегрирование по p нужно произвести по той области, в которой сближение можно считать „близким“. Границей близких прохождений является $p = a$ (т. е. большой полуоси орбиты).

Поэтому

$$\Delta E = 2\pi t m^3 \gamma^2 \int \frac{\lg \left(1 + \frac{a^2 v^4}{4m^2 \gamma^2} \right)}{v} dn,$$

или

$$\Delta E = 2\pi t m^3 \gamma^2 \frac{n}{\bar{v}} \lg \left(1 + \frac{a^2 \bar{v}^4}{4m^2 \gamma^2} \right), \quad (13)$$

где n — полное число звезд в единице объема (звездная плотность), а \bar{v} — некоторая средняя скорость. Если считать за время релаксации то время, в течение которого ΔE по абсолютной величине станет равно полной энергии системы — $\frac{\gamma m^2}{2a}$, то мы можем написать:

$$t = \frac{\bar{v}}{4\pi m \gamma a n \lg \left(1 + \frac{a^2 \bar{v}^4}{4m^2 \gamma^2} \right)} \quad (14)$$

Здесь нужно брать, конечно, некоторое среднее значение a за рассматриваемый период. Это среднее значение очень близко к начальному, ибо главная часть времени идет на увеличение энергии при меньших значениях a .

Подставим сюда $\bar{v} = 3 \cdot 10^8$ см/сек, вместо m — массу Солнца, и принимая, что наблюдаемые значения a доходят до $\frac{1}{20}$ парсека, а $n = 0.1 \frac{1}{\text{парсек}^3}$, найдем, что $t = 5 \cdot 10^9$ лет. Для меньших значений a найдем величины порядка 10^{10} и 10^{11} лет.

Таким образом, для двойных звезд с расстояниями компонентов, доходящими до десяти тысяч астр. ед., больцмановское распределение должно устанавливаться в течение времени порядка 10^{10} лет. Распределение Эпика $\left(\rho \sim \frac{1}{r^3} \right)$ выведено как раз для звезд с большим расстоянием компонентов (до десяти тысяч астр. ед.). Поэтому для таких пар на самом деле больцмановское распределение не имеет места. Отсюда можно заключить, что с момента образования этих пар прошло не более 10^{10} лет. Таким образом, распределение больших полуосей двойных звезд самым определенным образом говорит в пользу „короткой шкалы времени“.

Приведенный аргумент был указан в нашей предварительной заметке, но вычисления времени релаксации нами не были в ней приведены. Это дало Джинсу повод написать, что: „I cannot see that Prof. Ambarzumian's remarks in any way challenge this position, so that, it seems to me the observational date he mentions are not opposed to the long time scale of 10^{13} years, but only to an infinitely long time scale“.

Между тем мы видим, что простые вычисления указывают на то, что наблюдательные данные, о которых говорится, не только противоречат шкале в 10^{13} лет, но даже шкале в 10^{10} лет, и тем самым целиком говорят в пользу „короткой шкалы“.

5. Диссоциативное равновесие для двойных звезд

Дальнейшим весьма важным фактом, указывающим на то, что прохождения еще не успели создать статистического равновесия для пар с расстояниями порядка 10^4 астр. ед., являются данные об отклонении числа наблюдаемых таких пар от формулы диссоциативного равновесия.

Если через δn_D обозначить число пар, спутники которых находятся внутри элемента $\delta\Gamma$, упоминавшегося выше фазового пространства, то согласно обычным соображениям кинетической теории газов при диссоциативном равновесии мы должны иметь:

$$\frac{\delta n_D}{n^2} = \frac{\delta\Gamma}{(\pi m \theta)^{3/2}} e^{-\frac{E}{\theta}}, \quad (15)$$

где E — по-прежнему внутренняя энергия пары, когда спутник находится в элементе $\delta\Gamma$, θ — модуль больцмановского распределения для поступательного движения звезд, n — число одиночных звезд в единице объема. Если мы возьмем $\delta\Gamma$ в тех областях фазового пространства, в которых $a > 100$ астр. ед., то множитель $e^{-\frac{E}{\theta}}$ можно положить равным единице.

Тогда

$$\frac{\delta n_D}{n^2} = \frac{\delta\Gamma}{(\pi m \theta)^{3/2}}. \quad (16)$$

Суммируя, мы видим, что эта формула остается в силе и тогда, когда объем $\delta\Gamma$ имеет большие размеры, с тем лишь ограничением, что в этот объем не должны попадать точки, в которых величина $\frac{E}{\theta}$ не мала по сравнению с единицей.

Возьмем поэтому ту область фазового пространства, для которой большая полуось a заключена в некоторых пределах a_1 и a_2 . Этим пределам соответствуют пределы L

$$L_1 = m \sqrt{\gamma M} a_1^{3/2} \quad \text{и} \quad L_2 = m \sqrt{\gamma M} a_2^{3/2}.$$

Фазовый же объем, для которого L заключено в пределах между L_1 и L_2 , равен:

$$\delta\Gamma = 8\pi^3 \int_{L_1}^{L_2} M \int_0^L dG \int_0^G dH = \frac{4\pi^3}{3} (L_2^3 - L_1^3),$$

или

$$\delta\Gamma = \frac{4\pi^3}{3} \cdot m^3 (\gamma M)^{3/2} (a_2^{3/2} - a_1^{3/2}). \quad (17)$$

Подставляя (17) в (16) и полагая $M = m$, получим:

$$\frac{\delta n_D}{n^2} = \frac{4}{3} m^3 \left(\frac{\pi \gamma}{\theta} \right)^{3/2} (a_2^{3/2} - a_1^{3/2}). \quad (18)$$

Подставляя в эту формулу для всех постоянных величин и концентрации n уже приводившиеся численные значения и полагая $a_2 = 10^4$ А. У., $a_1 = 10^2$ А. У., мы получаем:

$$\frac{\delta n_D}{n} = 10^{-8},$$

т. е. из 10^8 звезд только одна должна иметь при диссоциативном равновесии спутника, большая полуось орбиты которого заключена между 100 А. У. и 10^4 А. У. На самом же деле мы знаем, что таким свойством обладает по меньшей мере из нескольких десятков одна звезда. Таким образом, число далеких пар в действительности в миллионы раз больше, чем это должно быть при диссоциативном равновесии.

Это обстоятельство является, пожалуй, наиболее ярким фактом, указывающим на то, насколько наша галактическая система далека от состояния статистического равновесия.

Здесь мы опять можем повторить на основании вывода предыдущего параграфа, что сроки установления статистического равновесия для столь далеких пар — порядка 10^{10} лет. Поэтому такое отклонение от диссоциативного равновесия свидетельствует о справедливости короткой шкалы времени.

Поскольку в настоящее время в галактике имеется избыток двойных звезд по сравнению с равновесным состоянием, то понятно, что сейчас процессы разрушения пар происходят гораздо (может быть в миллионы раз) чаще, чем процессы образования пар. Только в равновесном состоянии эти процессы компенсируют друг друга.

Грубо говоря, результат настоящего параграфа можно было формулировать следующим образом:

Существование таких пар, как α и Proxima Centauri или Washington 5583—5584, является доказательством короткой шкалы времени. В самом деле, звездных спутников с расстоянием порядка 10^4 А. У. так много, что даже ближайшая к нам звезда имеет такого спутника.

З а к л ю ч е н и е

В одно время, главным образом благодаря Джинсу, думали, что статистические особенности двойных звезд говорят в пользу долгой шкалы времени. С течением времени, когда все новые и новые факты из других областей звездной астрономии стали подтверждать короткую шкалу времени, выводы, сделанные Джинсом, оказались в противоречии с ними. Двойные звезды оставались главным аргументом в пользу долгой эволюционной шкалы. Но и это оказалось иллюзией.

Мы видим, что теоретически правильное рассмотрение вопросов статистики орбит двойных звезд приводит именно к короткой эволюционной шкале. Показать это и являлось целью настоящей статьи.

Астрономическая обсерватория
Ленинградского университета.
Ноябрь, 1936.

Статья поступила в редакцию
4 декабря 1936 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Nature, **137**, 537, 1936.
2. Nature, **136**, 432, 1935.
3. Nature, **137**, 537, 1936.
4. Frank und Mises., Die Differential-und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, Zweiter Teil, SS. 158 - 162, Braunschweig, 1927.
5. Aitken, The Binary Stars, 1935.
6. Tartu Observatory Publications, **25**, 1924.
7. Aitken, The New General Catalogue of Double Stars, Washington, 1933.
8. Bohr, Phil. Mag. **25**, 10, 1913.
9. Bohr, Phil. Mag. **30**, 581, 1915.
10. Seyfert, H. B., 896, 1934.
11. Barbier, C. R., **199**, 930, 1934.
12. Finse n, MN., **96**, 862, 1936.

К ВОПРОСУ О ДИНАМИКЕ ОТКРЫТЫХ СКОПЛЕНИЙ*

В литературе уже указывалось, что открытые звездные скопления должны по разным причинам с течением времени разрушаться. Так, например, Росселанд указал, что при прохождении через скопление посторонних звезд последние вызывают возмущения в движении звезд скопления и могут придать отдельным звездам скопления скорость, достаточную для того, чтобы уйти из сферы притяжения скопления. Таким образом, скопление будет постепенно лишаться звезд, т. е. разрушаться. Согласно Росселанду время, потребное для разрушения типичного открытого скопления, благодаря этому фактору будет порядка 10^{10} лет. Однако, как указывал уже автор в дополнении к русскому изданию книги Росселанда, существует другой фактор, который делает жизнь открытого скопления еще короче, именно: в скоплении происходят сближения звезд друг с другом, в результате чего члены скопления обмениваются кинетическими энергиями, и это постепенно должно приводить к установлению наиболее вероятного распределения, т. е. закона Максвелла—Больцмана. А это, как мы увидим, тоже ведет к разрушению скопления.

Время релаксации, т. е. время, в течение которого взаимные сближения звезд скопления приведут его к статистическому равновесию, определяется приближенно формулой:

$$\tau = \frac{3\sqrt{2}}{32\pi n} \frac{v^3}{G^2 m^2 \lg \frac{\rho}{\rho_0}}, \quad (1)$$

где n — число звезд в единице объема, m — масса звезды, G — постоянная тяготения, v — средняя скорость звезды в скоплении, ρ — радиус скопления и ρ_0 — то расстояние, на котором взаимная потенци-

* Ученые записки ЛГУ, № 22, серия матем. наук (астрономия), вып. 4, 19, 1938.

альная энергия двух звезд равна средней кинетической энергии звезды в скоплении, т. е.

$$\rho_0 = \frac{2 Gm}{v^2}. \quad (2)$$

Формула (1) выведена для случая звезд равной массы.

В формулу (1) как непосредственно, так и через ρ_0 входит средняя скорость v . Эта скорость может быть определена из следующих соображений. В каждый данный момент мы можем считать скопление находящимся в стационарном состоянии, так как время, в результате которого меняется закон распределения звезд, составляющих систему в фазовом пространстве, велико по сравнению со временем, необходимым звезде для того, чтобы пересечь систему с одного конца до другого (а это как раз и есть порядок длины промежутка, необходимого для установления стационарного состояния). В случае установившегося состояния в системе, состоящей из частиц, притягивающихся друг к другу по закону Ньютона, мы можем написать на основании теоремы о вириале:

$$U = 2T, \quad (3)$$

где U — абсолютная величина потенциальной энергии системы, а T — ее кинетическая энергия.

Точная формула для U гласит:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i \neq k} \frac{Gm^2}{r_{ik}},$$

где опять все массы приняты равными, а r_{ik} означает расстояние между i -той и k -той звездой. Мы заменим все r_{ik} их средним гармоническим значением, которое, очевидно, близко по величине к радиусу скопления ρ . Поэтому приближенно:

$$U = \frac{1}{2} \frac{GN(N-1)m^2}{\rho},$$

где N — полное число звезд в скоплении. Так как N велико по сравнению с единицей, то

$$U = \frac{1}{2} \frac{GN^2m^2}{\rho}.$$

С другой стороны,

$$2T = Nm v^2.$$

Поэтому теорема вириала принимает вид:

$$v^2 = \frac{GNm}{2\rho}. \quad (4)$$

Сопоставляя (4) и (2), находим, что

$$\lg \frac{\rho}{\rho_0} = \lg \frac{N}{4}; \quad (5)$$

подставляя (4) и (5) в (1) и принимая во внимание, что

$$n = \frac{N}{\frac{4}{3} \pi \rho^3},$$

находим:

$$\tau = \frac{2}{16 \lg \frac{N}{4}} \sqrt{\frac{N \rho^3}{Gm}}. \quad (6)$$

Полагая для типичного скопления $N = 400$, $\rho = 2$ парсека, $m = 2 \cdot 10^{33}$ грамм, находим для времени релаксации $\tau \cong 4 \cdot 10^7$ лет.

В результате приближения закона распределения к максвелл-больцмановскому появляется некоторое число звезд, у которых кинетическая энергия превосходит энергию отрыва звезды от скопления. Такие звезды уйдут из скопления. Весь вопрос заключается в том, каков процент таких звезд при больцмановском распределении. Если он мал, то разрушение скопления вследствие рассматриваемого процесса будет очень медленное. Очевидно отношение числа звезд, получающих возможность за время релаксации τ уйти из скопления, к полному числу звезд скопления равно:

$$p = \frac{\int_0^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon}{\Theta}} V^{-\varepsilon} d\varepsilon}{\int_0^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon}{\Theta}} V^{\varepsilon} d\varepsilon}, \quad (7)$$

где ε_0 есть работа отрыва, а Θ — модуль распределения, равный двум третям средней кинетической энергии, т. е.

$$\Theta = \frac{2}{3} \frac{T}{N} = \frac{1}{3} \frac{U}{N}. \quad (8)$$

С другой стороны, среднее значение ε_0 , т. е. работы отрыва, равно:

$$\varepsilon_0 = \overline{\sum_k \frac{Gm^2}{r_{ik}}} = \frac{2U}{N}, \quad (9)$$

где черта над знаком суммы означает усреднение по i . Сравнивая (8) и (9), находим:

$$\varepsilon_0 = 6\Theta.$$

Подставляя в (7), имеем приближенно:

$$p \cong \frac{e^{-\frac{\varepsilon_1}{\theta}} \theta V^{\frac{\varepsilon_0}{3}}}{\frac{1}{2} \sqrt{\pi} \theta^{\frac{3}{2}}} = 2e^{-6} \sqrt{\frac{6}{\pi}}$$

т. е. за время релаксации из скопления должно уйти около одной сотой полного числа звезд. Поэтому время разрушения скопления должно быть порядка нескольких миллиардов лет.

Этот результат получен для скопления, состоящего из звезд одинаковой массы. Следовательно, полученные числа применимы лишь к тем звездам скопления, которые имеют массы, близкие к средней массе звезд в скоплении. Для тех же звезд, у которых масса в два или три раза меньше, чем средняя масса звезд в скоплении, мы получим время, необходимое для их изгнания из системы порядка лишь нескольких сотен миллионов лет. Известно как раз, что открытые скопления бедны карликами. Быть может, степень бедности карликами указывает на степень продвижения скопления вдоль пути эволюции.

Если предположить, что наблюдаемые нами открытые скопления являются различными стадиями развития одного и того же скопления, то, поскольку уходящие из скопления звезды уносят с собой положительную кинетическую энергию, полная энергия скопления

$$H = T - U \quad (10)$$

должна убывать при переходе от более богатых скоплений к более бедным.

Внося (3) в (10), находим:

$$H = \frac{1}{2} U. \quad (11)$$

Следовательно, при сделанном предположении величина U должна возрастать. Из печатаемой ниже работы Орловой* видно, что такое возрастание U при уменьшении N не соблюдается.

Другая возможная гипотеза заключается в том, что все скопления образовались приблизительно в одну эпоху (может быть, в эпоху образования самой галактики). Тогда у больших по числу звезд и по диаметру скоплений эволюция должна была бы идти медленнее. Между прочим эти богатые и большие скопления должны были бы содержать более высокий процент карликов. Автору кажется, что этот

* Уч. зап. ЛГУ, сер. астрон., 4, 23, 1938. *Ред.*

результат оправдывается наблюдениями. Например, скопления β и γ Персея одновременно и богаты, и содержат большой процент карликов. Напротив, ряд малочисленных скоплений почти вовсе не содержит карликов.

Отсюда видно, что представляет большой интерес для дальнейших выводов определение не только функции светимости для различных скоплений, но также полной энергии H , которая, согласно (11), может быть найдена из абсолютной величины потенциальной энергии.

О ГРАВИТАЦИОННОЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ ОТКРЫТЫХ СКОПЛЕНИЙ*

Определение общей потенциальной гравитационной энергии звездных скоплений представляет значительный интерес с точки зрения теории эволюции этих объектов [1]. Знание потенциальной энергии позволяет вычислить и полную энергию H , так как последняя, согласно теореме о вириале, связана с потенциальной энергией U (взятой с обратным знаком) посредством соотношения

$$H = -\frac{1}{2}U.$$

Мы можем определить численное значение U , если знаем распределение плотностей в скоплении. В то же время пространственное распределение плотности может быть определено из распределения поверхностной плотности в проекции на небесную сферу. Это производится путем решения интегрального уравнения Абеля. Распределение поверхностной плотности в проекции на небесную сферу может быть найдено из подсчета звезд различных абсолютных величин, прибавления болометрической поправки и перехода от болометрических абсолютных величин к массам звезд. Таким путем Н. С. Орлова [2] определила численные значения U для восьми открытых скоплений.

Однако этот метод является очень сложным и вряд ли может быть применен к скоплениям со сравнительно небольшим числом членов. Но мы покажем, что в предположении сферической симметрии скопления (это предположение делалось и в прежнем методе) величина U может быть выражена непосредственно через поверхностную плотность, без перехода к пространственной плотности.

Пусть $\rho(r)$ будет пространственная плотность массы и r — расстояние от центра скопления. Мы можем взять координатную систему с началом в центре скопления и спроектировать все звезды на одну из осей, например ось y . Тогда распределение плотности на этой од-

* ДАН СССР, 24, 875, 1939.

номерной проекции будет определяться некоторой функцией $\varphi(y)$. Очевидно, что

$$\varphi(y) = 2\pi \int_y^{\infty} \rho(r) r dr.$$

Для массы $M(r)$, заключенной внутри сферы радиуса r вокруг центра, мы имеем:

$$M(r) = 4\pi \int_0^r r^2 \rho dr = -2 \int_0^r \frac{d\varphi(y)}{dy} y dy = 2 \int_0^r \varphi(y) dy = 2r\varphi(r).$$

Для потенциальной энергии U мы поэтому получим:

$$\begin{aligned} U &= G \int_0^{\infty} M(r) 4\pi r \rho dr = -2G \int_0^{\infty} M(r) \frac{d\varphi(r)}{dr} dr = \\ &= -4G \int_0^{\infty} \frac{d\varphi(r)}{dr} \left[\int_0^r \varphi(y) dy - r\varphi(r) \right] dr = 4G \int_0^{\infty} [\varphi(y)]^2 dy + \\ &+ 2G \int_0^{\infty} r \frac{d[\varphi(r)]^2}{dr} dr = 2G \int_0^{\infty} [\varphi(y)]^2 dy = G \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(y)]^2 dy. \end{aligned}$$

Таким образом, гравитационная энергия U равна интегралу от квадрата плотности на одномерной проекции скопления, умноженному на постоянную тяготения G . Это дает очень простой метод вычисления U : необходимо разделить всю проекцию скопления на небесную сферу на ряд параллельных полос (направление их можно взять произвольным) и сосчитать для каждой из полос сумму масс входящих в нее звезд. Таким образом мы получим величины $\varphi(y) \Delta y$, где Δy — ширина полосы. Возведя эти величины в квадрат, разделив квадраты на Δy и взяв сумму полученных чисел по всем полосам, получим $\int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(y)]^2 dy$, а помножая на G , найдем U .

Новый метод определения U имеет то преимущество, что может быть применен к сравнительно бедным скоплениям, где старый метод не дает результатов.

В качестве примера мы произвели применение нового метода к двум таким скоплениям: *Coma Berenices* и *NGC 752*. Мы даем ниже вкратце необходимые данные о процессе вычисления.

1. *Скопление Coma Berenices*. Распределение масс в проекции было получено на основании работы Шайна [3]. Были приняты во внимание массы 15 звезд, которые, согласно Шайну, принадлежат к скоплению. Кроме того, было прибавлено распределение масс 22 звезд, которые, согласно Шайну, возможно, также принадлежат к скоплению, но каждая из масс этих 22 звезд была предварительно разделена на 2. Таким образом, число физических членов скопления было принято равным 26. По Шайну, вероятное число физических членов близко к 30. Массы звезд были вычислены из их абсолютных болометрических величин. При этом мы использовали кривую масса — светимость Куйпер'а [4]. Болометрические поправки для известных спектральных классов были заимствованы из другой работы Куйпер'а [5]. Модуль расстояния был принят равным 4.3.

2. *Скопление NGC 752*. Собственные движения в этом скоплении были определены Ebbighausen'ом [6].

Все звезды в зависимости от их собственных движений были разделены им на ряд классов с различными вероятностями принадлежности к скоплению. Мы взяли только звезды первых двух классов, для которых вероятность принадлежности к скоплению наибольшая. Число звезд других классов, физически связанных со скоплением, было принято пренебрежимо малым. Модуль расстояния был взят равным 8.0. К фотографическим величинам были прибавлены болометрические поправки, а также вычтены колориндексы. Значения болометрической поправки и колориндекса определялись на основании спектрального типа. В тех случаях, когда спектральный тип не был определен, он выводился на основании соотношения величина — спектр для данного скопления.

Результаты вычисления для обоих скоплений приведены в ниже следующей таблице:

Скопление	Расстояние в парсеках	Число членов	Общая масса	U в эргах
Coma Berenices	73	26	50	$0.40 \cdot 10^{44}$
NGC 752	400	64	127	$3.61 \cdot 10^{44}$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Амбарцумян, Уч. зап. ЛГУ, сер. астрон., **4**, 19, 1938.
2. Н. С. Орлова, Уч. зап. ЛГУ, сер. астрон., **4**, 23, 1938.
3. Г. А. Шайн, Бюлл. Пулковской обсерват., **16**, № 2, 1938.
4. G. P. Kuiper, *Astrophysical Journal*, **88**, 472, 1938.
5. G. P. Kuiper, *Astrophysical Journal*, **88**, 429, 1938.
6. E. G. Ebbighausen, *Astrophysical Journal*, **89**, 431, 1939.

Примечание. Последние четыре статьи В. А. Амбарцумяна имеют большое значение как для статистической механики звездных систем, так и для космогонии. О космогоническом значении полученных в них результатов подробно говорится в других статьях В. А. Амбарцумяна (см. раздел „Космогония“).

ТЕОРИЯ РАССЕЯНИЯ СВЕТА

О СООТНОШЕНИИ МЕЖДУ РЕШЕНИЕМ И РЕЗОЛВЕНТОЙ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЛУЧИСТОГО РАВНОВЕСИЯ*

(Поступило 29 сентября 1928)

Показано, что между решением $\lambda(\tau)$ и резольвентой $\Gamma(\tau, t)$ интегрального уравнения лучистого равновесия имеет место соотношение

$$\frac{d\lambda(\tau)}{d\tau} = \Gamma(0, \tau).$$

Э. Хопф [1] показал, что однородное интегральное уравнение лучистого равновесия

$$B(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} Ei|\tau - t| B(t) dt \quad (1)$$

имеет нетривиальное решение. Мы попытаемся здесь показать, что решение Хопфа находится в тесной связи с резольвентой ядра $Ei|\tau - t|$ [2].

§ 1. Прежде всего рассмотрим неоднородное интегральное уравнение

$$Ei\tau = \Phi(\tau) - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} Ei|\tau - t| \Phi(t) dt. \quad (2)$$

Можно доказать, что решение уравнения (2) может быть представлено в виде

$$\Phi(\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(\tau), \quad (3)$$

* Über die Beziehung der Lösung und der Resolvente der Integralgleichung des Strahlungsgleichgewichts. Z. f. Ph. **52**, 263, 1929.

причем

$$a_1(\tau) = E i \tau \quad (4)$$

и

$$a_{i+1}(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} E i |\tau - t| a_i(t) dt \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (4')$$

При этом ряд (3) является равномерно сходящимся.

Действительно, мы имеем

$$a_2(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} E i |\tau - t| E i t dt = \frac{1}{2} \int_0^1 + \frac{1}{2} \int_1^{\infty} = \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B,$$

где обозначено:

$$A = \int_0^1 \text{ и } B = \int_1^{\infty}.$$

Для B имеем

$$B = \int_1^{\infty} E i |\tau - t| E i t dt < 2 \int_1^{\infty} E i |\tau - t| E i_2 t dt,$$

где введено обозначение*

$$E i_2 t = \int_1^{\infty} \frac{e^{-ty}}{y^2} dy = e^{-t} - t E i t.$$

* Так как мы имеем

$$E i \tau = \frac{e^{-\tau}}{\tau + \theta(\tau)}, \text{ где } (0 \leq \theta \leq 1)$$

(сравнить Хопф, *Z. f. Ph.*, **46**, 375, 1928). Пусть $\tau > 1$. Тогда

$$E i \tau = \frac{e^{-\tau}}{\tau + \theta(\tau)} > \frac{1}{2} \frac{e^{-\tau}}{\tau}.$$

Отсюда следует

$$E i_2 \tau = \int_{\tau}^{\infty} E i y dy > \frac{1}{2} \int_{\tau}^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy > \frac{1}{2} E i \tau$$

или

$$E i \tau < 2 E i_2 \tau, \text{ когда } \tau > 1.$$

Далее

$$A = \int_0^1 Ei|\tau - t| Eit dt = Ei|\tau - \delta| \int_0^1 Eit dt \quad (0 \leq \delta \leq 1)$$

или

$$A < \frac{3}{2} eEi\tau < 3eEi_2\tau,$$

если $\tau > 2^*$.

Так как A является непрерывной функцией τ и $Ei_2\tau$ в интервале $0 \leq \tau \leq 2$ всегда больше нуля и также непрерывна, то мы можем выбрать такое M , что будет иметь место

$$\int_0^1 Ei|\tau - t| Eit dt < MEi_2\tau.$$

Итак имеем:

$$\begin{aligned} a_2(\tau) &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} Ei|\tau - t| Eit dt < \int_1^{\infty} Ei|\tau - t| Ei_2 t dt + MEi_2\tau < \\ &< \int_0^{\infty} Ei|\tau - t| Ei_2 t dt + MEi_2\tau. \end{aligned} \quad (5)$$

Мы определяем теперь функциональный ряд $\Psi_1(\tau), \Psi_2(\tau), \dots$ посредством соотношений

$$\left. \begin{aligned} \Psi_1(\tau) &= \frac{1}{2} Ei_2\tau \\ \Psi_{n+1}(\tau) &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} Ei|\tau - t| \Psi_n(t) dt \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Тогда из (6) получаем:

$$a_2(\tau) < 2M\Psi_1(\tau) + 4\Psi_2(\tau)$$

и, принимая во внимание (6) и (4'),

$$a_{n+1}(\tau) < 2M\Psi_n(\tau) + 4\Psi_{n+1}(\tau). \quad (7)$$

* В самом деле, при $\tau > 2$

$$\frac{Ei|\tau - \delta|}{Ei\tau} = \frac{e^{-\tau+\delta}}{\tau + \theta(\tau - \delta)} = \frac{e^{-\tau} [\tau + \theta(\tau)]}{\tau + \theta(\tau - \delta)} < \frac{e^{-\tau} (\tau + 1)}{\tau} = e^{-\delta} \left(1 + \frac{1}{\tau}\right) < \frac{3}{2} e.$$

Ряд положительных функций $\sum_{i=1}^{\infty} \Psi_i(\tau)$ равномерно сходится [3],

откуда следует, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} [2M\Psi_i(\tau) + 4\Psi_{i+1}(\tau)]$ обладает тем же свойством. Тогда неравенство (7) показывает, что разложение $\sum_{i=1}^{\infty} a_i(\tau)$ также равномерно сходится. Согласно [4],

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Psi_i(\tau) = 1$$

и мы заключаем, что

$$z(\tau) = \sum_{i=2}^{\infty} a_i(\tau) \quad (8)$$

является ограниченной и непрерывной функцией τ . Теперь непосредственная подстановка (3) в (2) показывает, что мы нашли решение уравнения (2).

Итак, мы можем написать решение уравнения (2) в виде:

$$\Phi(\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(\tau) = Eit\tau + z(\tau). \quad (9)$$

Если мы теперь обозначим через $K^{(n)}(\tau, t)$ итерированные ядра, принадлежащие к ядру $Ei|\tau - t|$, то получим:

$$a_i(t) = \frac{1}{2^{n-1}} K^{(n)}(0, t), \quad (10)$$

если учтем определения (4) и (4').

Итак, мы находим, что

$$\Phi(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}} K^{(i)}(0, t) = \Gamma(0, t), \quad (11)$$

где $\Gamma(\tau, t)$ является разрешающим ядром или резольвентой интегрального уравнения

$$f(\tau) = x(\tau) - \frac{1}{2} \int_0^{\tau} Ei|\tau - t| x(t) dt. \quad (12)$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \Phi(t) E i_2 t dt &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^{\infty} a_i(t) E i_2 t dt = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}} \int_0^{\infty} K^{(i)}(0, t) E i_2 t dt = \\ &= 4 \sum_{i=2}^{\infty} \Psi_i(0) = 4 [1 - \Psi_1(0)] = 2. \end{aligned} \quad (13)$$

При этом возможность почленного интегрирования можно без труда доказать.

§ 2. Запишем уравнение (2) в виде:

$$\Phi(\tau) = E i \tau + \frac{1}{2} \int_0^{\tau} + \frac{1}{2} \int_{\tau}^{\infty} = E i \tau + \frac{1}{2} \int_0^{\tau} E i x \Phi(\tau - x) dx + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} E i x \Phi(\tau + x) dx.$$

Тогда посредством интегрирования стдельных слагаемых получим:

$$\int_0^s [E i t + \frac{1}{2} \int_0^{\tau} E i x \Phi(\tau - x) dx] d\tau = \frac{1}{2} \int_0^s E i x \chi(s - x) dx,$$

где

$$\chi(s) = 2 + \int_0^s \Phi(\tau) d\tau$$

и

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^s d\tau \int_0^{\infty} E i x \Phi(\tau + x) dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} E i x \chi(\tau + x) dx \Big|_{\tau=0}^{\tau=s} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} E i x \chi(s + x) dx - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} E i x \chi(x) dx. \end{aligned} \quad (14)$$

Значит,

$$\begin{aligned} \chi(s) - 2 + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} E i x \chi(x) dx &= \frac{1}{2} \int_0^s E i x \chi(s - x) dx + \int_0^{\infty} E i x (s + x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} E i |s - t| \chi(t) dt. \end{aligned} \quad (15)$$

Из (13) и (14) следует

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} Eix \chi(x) dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} 2Ei x dx + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} Ei x dx \int_0^x \Phi(t) dt = \\ &= 1 + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \Phi(x) Ei_2 x dx = 2. \end{aligned}$$

Поэтому уравнение (15) переходит в

$$\chi(s) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} Ei |s - t| \chi(t) dt, \quad (16)$$

т. е. $\chi(\tau)$ есть решение интегрального уравнения Милна.

Из $\frac{d\chi}{d\tau} = \Phi(\tau)$ и (10) можно заключить, если учесть ограниченность $\chi(\tau)$, что $\chi(\tau) < M + N\tau$, где M и N являются двумя положительными постоянными.

Хопф показал, что существует единственное такое решение (с точностью постоянного коэффициента) уравнения (1). Итак, мы имеем следующий результат. Между резольвентой интегрального уравнения (12) и решением интегрального уравнения Милна, полученным Хопфом, имеет место соотношение:

$$\frac{d\chi(\tau)}{d\tau} = \Gamma(0, \tau). \quad (17)$$

Ленинград, 26 сентября 1928 г

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Норф. Z. f. Ph. **46**, 374, 1928, см. также Z. f. Ph. **49**, 155, 1928.
2. В. А. Амбарцумян, Н. А. Козырев, MN, **87**, 651, 1927.
3. В. А. Амбарцумян, Н. А. Козырев, MN, **87**, 213, 1927, Z. f. Ph. **47**, 607, 1928.
4. U. Wegner, Z. f. Ph. **45**, 826, 1927.

О ДИФФУЗИИ ФОТОНОВ ЧЕРЕЗ РАССЕИВАЮЩУЮ СРЕДУ В СВЯЗИ С ПРИМЕНЕНИЕМ К НЕКОТОРЫМ АСТРОФИЗИЧЕСКИМ ВОПРОСАМ*

Для некоторых задач астрофизики важно уметь дать ответ на следующие вопросы:

1. Пусть мы имеем поток световых квантов, проходящих через рассеивающую среду заданной оптической толщины. Каково среднее число рассеяний, испытываемых каждым световым квантом при диффузии через всю рассеивающую среду?

2. Каково среднее время, которое затрачивается световым квантом на диффузию через рассеивающую среду?

Мы решим эти вопросы для двух моделей, представляющих астрофизический интерес.

§ 1. Пусть рассеивающий слой представляет собой материю, заключенную между двумя концентрическими сферами с радиусами R_1 и R_2 ($R_2 > R_1$). Пусть в общем центре этих сфер находится источник монохроматического излучения („звезда“) частоты ν . Пусть далее $R_2 - R_1 \ll R_1$. Мы получаем известную геометрическую модель Милна, предложенную им для применения к планетарным туманностям.

Очевидно среднее число n рассеяний одного кванта при диффузии можно получить следующим образом. Рассмотрим случай лучевого равновесия. Тогда полное количество квантов, выходящих в единицу времени из туманности, постоянно. Оно равно $4\pi R_2^2 \frac{H_0}{h\nu}$, где H_0 есть поток в рассматриваемой частоте, исходящий из единицы поверхности на внешней границе, и h — постоянная Планка. С другой стороны, пусть N_s будет полное число всех рассеяний, происходящих во всей туманности в единицу времени. Очевидно при равновесии искомое среднее число рассеяний будет:

$$n = \frac{N_s}{4\pi R_2^2 \frac{H_0}{h\nu}} \quad (1)$$

* Уч. зап. ЛГУ, № 22, 14, 1938.

Задача заключается поэтому в подсчете N_s . В силу условия лучевого равновесия количество рассеянной энергии, излучаемой некоторым объемом dV на расстоянии R от центра, будет:

$$\sigma \rho dV \left\{ \int Id\omega + \pi S e^{-(\tau_1 - \tau)} \right\} = 4\pi B \sigma \rho dV.$$

Здесь σ — коэффициент рассеяния, отнесенный к единице массы, ρ — плотность, I — интенсивность диффузного излучения „туманности“, $d\omega$ — элемент телесного угла, πS — количество излучения, падающего от центральной звезды в рассматриваемой частоте в единицу времени на внутреннюю границу туманности, и

$$\tau = \int_R^{R_2} \sigma \rho dR; \quad \tau_1 = \int_{R_1}^{R_2} \sigma \rho dR,$$

т. е. τ — оптическая глубина, отсчитанная от внешней границы; τ_1 — полная оптическая толщина рассеивающего слоя.

Таким образом, полное количество энергии, излучаемой в единицу времени во всех частях „туманности“, равно:

$$4\pi \iiint B \sigma \rho dV = 16\pi^2 R_1^2 \int B \sigma \rho dR = 16\pi^2 R_1^2 \int_0^{\tau_1} B(\tau) d\tau. \quad (2)$$

Количество квантов, излучаемых в единицу времени, во всей туманности получится делением этой величины на $h\nu$. Поэтому из (1) и (2) получаем для среднего числа рассеяний:

$$n = 4\pi \frac{\int_0^{\tau_1} B_s(\tau) d\tau}{H_s(0)}. \quad (3)$$

Милн дал решение уравнений лучевого равновесия для этой проблемы. Его решение, выполненное в эддингтоновском приближении, дает:

$$\left. \begin{aligned} B_s &= S \left\{ \frac{3}{4} \tau + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{-\tau_1} - \frac{1}{2} e^{-(\tau_1 - \tau)} \right\}, \\ H_s(0) &= \pi S (1 - e^{-\tau_1}). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

На самом деле, однако, полученное Милном выражение для $H_s(0)$ характеризует диффузное излучение, т. е. дает поток квантов, потерпевших хотя бы одно рассеяние. Между тем для того, чтобы получить среднее число рассеяний одного кванта, мы должны учесть

и те случаи, когда квант проходит через туманность, не испытывая ни одного рассеяния. Это будут кванты, входящие в прямое излучение звезды, прошедшие через всю туманность. Поток от прямого излучения на внешней границе будет равен $\pi S e^{-\tau_1}$. Поэтому для полного потока H , мы имеем естественно:

$$H_s(0) = \pi S$$

и, на основании (3) и (4),

$$n = \frac{3}{2} \tau_1^2 + (2 + e^{-\tau_1}) \tau_1 - 2(1 - e^{-\tau_1}). \quad (5)$$

Когда $\tau_1 \gg 1$, мы можем принять асимптотическую формулу:

$$n = \frac{3}{2} \tau_1^2. \quad (6)$$

Вывод этой формулы и являлся нашей целью. Для того чтобы сосчитать среднее время, в течение которого световой квант диффундирует через туманность, достаточно разделить полную энергию всех квантов данной частоты ν , содержащихся в туманности в состоянии лучевого равновесия, на полную энергию, испускаемую поверхностью туманности в единицу времени в рассматриваемой частоте.

При подсчете первой из этих величин нужно считать не только энергию всех квантов, путешествующих в данную минуту по туманности, но также и энергию всех поглощенных в данный момент квантов. В тех случаях, когда временем нахождения кванта в поглощенном состоянии можно пренебречь по сравнению со средним временем их жизни от испускания до последующего поглощения, достаточно учесть только „явную энергию“ поля излучения. В этом случае очевидно, что среднее время T пребывания кванта в туманности получится простым умножением числа рассеяний на средний промежуток времени t между двумя рассеяниями:

$$T = nt = \frac{3}{2} \tau_1^2 t.$$

Очевидно, среднее время между двумя рассеяниями определяется через:

$$t = \frac{l}{c},$$

где l — средняя свободная длина пути светового кванта. Если плотность в туманности меняется как функция R , то и l будет меняться.

Если l постоянно, мы получаем:

$$T = \frac{3}{2} \tau_1^2 \frac{l}{c}. \quad (7)$$

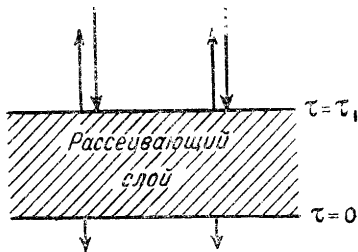
Легко видеть, что средняя свободная длина пути светового кванта равна такому отрезку, что отсчитанная вдоль него оптическая толщина равна единице. В случае равномерной плотности мы имеем поэтому:

$$l = \frac{R_2 - R_1}{\tau_1}.$$

Отсюда (7) переписывается в виде:

$$T = \frac{3}{2} \tau_1 \frac{R_2 - R_1}{c}. \quad (8)$$

Итак, время, в течение которого световой квант диффундирует через рассеивающую туманность, равно времени, в течение которого свет проходит линейную толщину туманности, умноженную на $3/2 \tau_1$. Совершенно аналогично предыдущему можно рассмотреть случай, когда фотон возникает между двумя плоскопараллельными слоями оптической толщины τ_1 , диффундирует через них и проходит наружу. Наконец, можно рассмотреть случай, когда источники рассеиваемых фотонов распределены по самой туманности и не сосредоточены в центре.



В первом случае мы получим опять формулу (6). Во втором случае появится некоторый числовой множитель, зависящий от распределения источников по туманности. Однако этот множитель будет очень близок к единице, если источники фотонов расположены преимущественно во внутренних слоях туманности.

§ 2. Рассмотрим теперь диффузию фотонов в том случае, когда рассеивающий слой находится по одну сторону от источника фотонов, как это показано на чертеже. Пусть на рассеивающий слой оптической толщины τ_1 падают с одной стороны фотоны. Если τ_1 велико, то большая часть их отражается диффузно назад и только небольшая часть пробивается через слой. Такого типа рассеяние мы имеем в образующих слоях Солнца и звезд. Легко сразу физически понять, что число рассеяний для каждого *прошедшего* через слой фотона должно быть на этот раз меньше.

В самом деле, пробиваются через слой именно те фотоны, кото-

рые случайно уже при небольшом числе рассеяний проникнут глубоко в рассеивающий слой. Происходит своего рода „отбор“ тех фотонов, которые с самого начала имели мало рассеяний. Наоборот, те фотоны, которые терпят рассеяние в самом начале слоя, имеют больше шансов быть отраженными назад.

Расчет может быть произведен следующим образом. Прежде чем достигнуть $\tau = 0$, фотон должен пересечь поверхность $\tau = \frac{\tau_1}{2}$. С другой стороны, фотон, достигший поверхности $\tau = \frac{\tau_1}{2}$, имеет равную вероятность выхода из слоя в обоих направлениях. Число рассеяний, которое испытывает фотон после первого пересечения поверхности $\tau = \frac{\tau_1}{2}$, очевидно, поэтому равно $\frac{3}{2} \left(\frac{\tau_1}{2}\right)^2$, так как в этом случае мы имеем задачу, аналогичную рассмотренной в § 1 задаче о туманности. Но прежде чем достигнуть поверхности $\tau = \frac{\tau_1}{2}$, фотон должен пересечь поверхность $\tau = \frac{3}{4} \tau_1$. Число рассеяний, испытываемых фотоном на пути от $\tau = \frac{3\tau_1}{4}$ до $\tau = \frac{\tau_1}{2}$, будет равно, на основании предыдущего параграфа, $\frac{3}{2} \left(\frac{\tau_1}{4}\right)^2$ и т. д.

Итак, среднее полное число всех рассеяний, испытываемых фотоном, выходящим наружу, будет:

$$n = \frac{3}{2} \left\{ \left(\frac{\tau_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\tau_1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\tau_1}{8}\right)^2 + \dots \right\} = \frac{1}{2} \tau_1^2. \quad (9)$$

Так же, как в предыдущем параграфе, отсюда можно получить и среднее время пребывания фотона в рассеивающем слое.

§ 3. Интересен результат применения формулы (6) к газовым туманностям. В этом случае мы знаем, что фотоны, принадлежащие к линии L_α , действительно диффундируют через туманность, испытывая чистое рассеяние и не подвергаясь изменению частоты. Правда, источником квантов является не непосредственно звезда. Они образуются внутри туманности из L_c -квантов. Но это не должно влиять качественно на результат, и мы для получения порядка величины можем применить формулу (6). Оптическая толщина планетарной туманности в линии L_α не меньше 10^4 и вероятно порядка 10^5 . Следовательно, число рассеяний каждого фотона будет порядка 10^{10} .

Если считать, что время, в течение которого свет проходит толщину планетарной туманности, достигает $1/10$ года, то $T = 10^4$ лет.

Для диффузной газовой туманности, где время прохождения нерассеиваемого света через толщину туманности порядка года или даже нескольких лет, время, в течение которого фотоны L_α диффундируют через туманность, будет порядка 10^5 лет.

Эти цифры представляют тот интерес, что, вероятно, возраст туманности не во много раз больше них.

§ 4. Рассмотрим рассеивающий слой, который обладает также способностью производить истинное поглощение, причем коэффициент истинного поглощения κ мал по сравнению с коэффициентом рассеивания σ . Очевидно на каждое рассеяние будет приходиться $\frac{\kappa}{\sigma}$ поглощений. Таким образом, пользуясь (9), мы можем сказать, что полное число всех поглощений при диффузии светового кванта, выходящего из фотосферы и проходящего через рассеивающий слой, будет порядка $\frac{1}{2} \frac{\kappa}{\sigma} \tau_1^2$. Очевидно, если $\frac{1}{2} \frac{\kappa}{\sigma} \tau_1^2 \ll 1$, то мы можем пренебречь влиянием истинного поглощения. В противном случае его нужно учитывать, так как даже небольшое число поглощений приводит к изменению частоты. Таким образом, критерием возможности пренебречь влиянием истинного поглощения является выполнение неравенства

$$\sqrt{\frac{2\sigma}{\kappa}} \gg \tau_1. \quad (10)$$

Этот результат может быть получен также из теории лучевого равенства при одновременном действии поглощения и излучения, но важно иметь критерий без наличия полной теории вопроса.

Примечания. 1. В 1948 г. В. Амбарцумян снова обратился к вопросам, затронутым в настоящей статье. В работе „О числе рассеяний при диффузии фотонов в мутной среде“ (стр. 281 этого сборника) им дан новый способ для определения числа рассеяний.

2. Произведенная выше оценка средней продолжительности пребывания L_α -кванта в газовой туманности не может быть принята в настоящее время (см. примечание на стр. 47).

РАССЕЯНИЕ И ПОГЛОЩЕНИЕ СВЕТА В ПЛАНЕТНЫХ АТМОСФЕРАХ. I*

Теоретическое решение вопроса о световом режиме в планетных атмосферах, так же как и решение аналогичной проблемы для морских и океанских глубин, представляет значительные трудности. Метод учета рассеяний последовательных порядков, математически эквивалентный разложению в ряд Неймана решения соответствующего интегрального уравнения, приводит на первых же ступенях к невероятно громоздким формулам. Между тем, для того чтобы решение хоть сколько-нибудь правильно представляло приближение к точному решению для случая больших оптических глубин ($\tau \gg 1$), необходимо учитывать рассеяние очень большого числа порядков. Достаточно сказать, что среднее число рассеяний, претерпеваемых световым квантом прежде, чем достигнуть оптической глубины τ , порядка τ^2 . Только при $\tau < 1$, т. е. когда атмосфера обладает лишь небольшой непрозрачностью, метод учета рассеяний последовательных порядков имеет практическое значение.

В противоположность этому методу, метод приближенного решения уравнений переноса (приближения Шварцшильда—Шустера и Эддингтона) соблазняет своей простотой. Но этот метод, с одной стороны, не был до конца обобщен на случай, когда индикатриса рассеяния не обладает сферической симметрией, и, с другой стороны, при наличии поглощения наряду с рассеянием, приводит к большим ошибкам для больших оптических глубин. На малых же оптических глубинах этот метод вообще не может дать хороших результатов,

В настоящей работе рассматривается проблема одновременного рассеяния и поглощения в атмосфере, состоящей из плоско-параллельных слоев. При этом сначала берется для простоты случай сферической индикатрисы рассеяния, а затем производится обобщение на случай любой индикатрисы. Сущность метода заключается в том, что ищется решение соответствующего интегрального уравнения путем

* Уч. зап. ЛГУ, № 82, сер. матем. наук (астрономия), вып. 11, 1941.

последовательных приближений. Однако, в отличие от метода учета рассеяний последовательных порядков, мы будем исходить как от первого приближения от такой функции, которая на больших оптических глубинах достаточно близка к точному решению. Путем итераций получаются следующие приближения, которые представляются в сравнительно простом виде. Полученные результаты могут быть применены к ряду практических случаев.

§ 1. Нахождение исходного приближения

В большинстве рассматриваемых практических задач источники освещения расположены вне атмосферы. Поэтому на большую оптическую глубину прямое излучение от этих источников не попадает. Туда попадает лишь многократно рассеянное излучение этих источников в виде некоторого потока диффузного излучения, идущего от поверхностных слоев вниз. Поскольку мы будем отсчитывать оптическую глубину от границы слоев вглубь, мы можем сказать, что имеет место поток излучения в направлении возрастающих τ . Оптическая

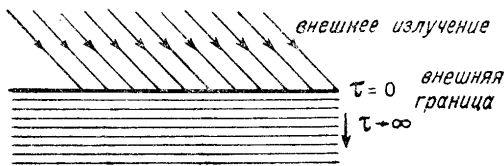


Рис. 1. Односторонняя бесконечность.



Рис. 1а. Двусторонняя бесконечность.

глубина τ будет при этом меняться от 0 до $+\infty$ (односторонняя бесконечность). Вследствие наличия истинного поглощения поток излучения при углублении будет все более уменьшаться.

Но изучая световой режим на больших оптических глубинах, куда, вдобавок, не проникает прямое излучение снаружи, мы можем считать, что он будет весьма близок к световому режиму в плоскопараллельных слоях, состав-

ляющих двустороннюю бесконечность, т. е. в такой совокупности плоскопараллельных слоев, в которой луч, пущенный от некоторой точки по нормали к этим слоям, ослабнет до нуля, независимо от того, пустили ли мы луч в сторону положительной или отрицательной нормали.

Оба случая (односторонней и двусторонней бесконечности) представлены схематически на прилагаемом чертеже (рис. 1 и 1а).

В реальных задачах, встречаемых в теории планетных атмосфер, мы имеем дело, строго говоря, с атмосферой конечной оптической

толщины. Но если эта оптическая толщина очень велика по сравнению с единицей, мы вводим модель односторонней бесконечности. Но, очевидно, что, если мы изучаем световой режим в глубоких слоях этой атмосферы (но все же не очень близких к поверхности планеты), мы можем ожидать получить приближенное решение, вводя модель двусторонней бесконечности с потоком энергии, идущим из области отрицательных z . Для этой модели мы найдем точное решение. Чем более глубокие слои мы берем, тем лучше это решение отражает истинное положение дел. Именно это решение будет потом служить исходным приближением для решения реальных задач. Поэтому начнем с такого решения задачи для двусторонней бесконечности.

§ 2. Интегральное уравнение для двусторонней бесконечности

Обозначим через α коэффициент ослабления в нашей среде. Величина α может быть и обычно является функцией высоты z над поверхностью планеты.

Для оптической глубины τ на высоте z мы будем иметь определение

$$\tau = \int_z^0 \alpha dz,$$

где нульпункт высот выбран произвольно где-то в глубоких слоях атмосферы.

Если обозначим через I интенсивность излучения, то единицей объема будет поглощаться и рассеиваться в единицу времени количество энергии:

$$\alpha \int I d\omega,$$

где интегрирование распространено по всем телесным углам. Из этого количества некоторая доля будет рассеиваться. Обозначим ее через

$$\sigma \int I d\omega,$$

тогда τ будет коэффициентом рассеяния. Остальное же количество

$$(\alpha - \sigma) \int I d\omega = \kappa \int I d\omega$$

будет поглощаться. Величину κ назовем коэффициентом поглощения.

Если обозначим через $\eta(\theta, \varphi)$ количество энергии, испускаемое единицей объема в единицу времени и в единице телесного угла в направлении, определяемом углами θ, φ , то, поскольку все испускаемое излучение есть рассеянное, а истинное излучение отсутствует, то вообще

$$\eta(\theta, \varphi) = \frac{\sigma}{4\pi} \int x(\gamma) I(\theta', \varphi') d\omega', \quad (1)$$

где γ есть угол между направлениями θ, φ и θ', φ' , а $x(\gamma)$ — так называемая индикатриса рассеяния, обладающая тем свойством, что

$$\frac{1}{4\pi} \int x(\gamma) d\omega = 1; \quad \frac{1}{4\pi} \int x(\gamma) d\omega' = 1. \quad (2)$$

Интегрируя (1) по θ и φ , будем, очевидно, иметь

$$\int \eta(\theta, \varphi) d\omega = \sigma \int I(\theta', \varphi') d\omega'. \quad (3)$$

В частном случае, когда имеем сферическую индикатрису рассеяния, т. е. $x(\gamma) = 1$, η не зависит от направления

$$\eta = \frac{\sigma}{4\pi} \int I(\theta, \varphi) d\omega. \quad (4)$$

Разделив на α , находим:

$$\frac{\eta}{\alpha} = \frac{\sigma}{\alpha} \frac{1}{4\pi} \int I d\omega. \quad (5)$$

Отношение $\frac{\eta}{\alpha}$, как всегда в теории лучевого равновесия, обозначается через B , отношение же $\frac{\sigma}{\alpha}$ обозначим через

$$\lambda = \frac{\sigma}{\alpha}. \quad (6)$$

Тогда

$$B = \frac{\lambda}{4\pi} \int I d\omega. \quad (7)$$

Это условие будем называть уравнением лучевого равновесия. Как известно, из решения уравнения переноса, которое можно написать для нашего случая в виде:

$$\cos \theta \frac{dI}{d\tau} = I - B, \quad (8)$$

где θ —угол, образуемый направлением излучения с нормалью, следует при двусторонней бесконечности:

$$\frac{1}{4\pi} \int I d\omega = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} Ei|\tau - t| B(t) dt, \quad (9)$$

где $Ei(x)$ есть трансцендентная функция, равная $Ei(x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy$,

вследствие чего уравнение лучевого равновесия (7) можно переписать в виде:

$$B(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} Ei|\tau - t| B(t) dt. \quad (10)$$

Заметим, что уравнение (1), из которого следует (10), предполагает отсутствие „источников“ рассеянного излучения, в частности, в данном случае прямого излучения внешних тел. Физически это означает, что эти источники удалены в бесконечность, например, в сторону отрицательных τ .

Решение уравнения (10) ищем в форме:

$$B(t) = Ce^{-kt}, \quad (11)$$

где k — положительное число.

Подставляя (11) в (10), находим, что последнее уравнение действительно удовлетворится в случае, если k связано с λ равенством:

$$\lambda = \frac{2k}{\ln \frac{1+k}{1-k}}. \quad (12)$$

Очевидно, что каждому λ , заключенному в пределах $[0,1]$, соответствует одно положительное значение k , удовлетворяющее (12). Но если некоторое k удовлетворяет (12), то ему удовлетворяет также $-k$. Поэтому уравнению (10) наряду с решением Ce^{-kt} удовлетворяет и решение $C_1 e^{kt}$. Таким образом, общее решение имеет вид:

$$B(t) = Ce^{-kt} + C_1 e^{kt}. \quad (13)$$

Можно показать, что постоянная C_1 при наших условиях равна нулю. Для этого рассмотрим поток излучения H . Как известно,

$$H = \int I \cos \theta d\omega. \quad (14)$$

Для того чтобы получить изменение потока с оптической глубиной, помножим уравнение переноса на $d\omega$ и проинтегрируем по всем телесным углам. Тогда получим:

$$\frac{dH}{d\tau} = \int I d\omega - 4\pi B. \quad (15)$$

С другой стороны, в силу условия лучевого равновесия,

$$4\pi B = \lambda \int I d\omega.$$

Поэтому

$$\frac{dH}{d\tau} = \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) 4\pi B, \quad (16)$$

или, при нашем решении,

$$\frac{dH}{d\tau} = \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) 4\pi [C_1 e^{-k\tau} + C_2 e^{k\tau}]. \quad (17)$$

По физическому смыслу функции B коэффициент C_1 должен быть положителен или равен нулю, иначе при $\tau \rightarrow \infty$ было бы $B(\tau) < 0$. С другой стороны, из (17) следует, что если $C_1 > 0$, то при больших τ и H должно стать положительным и бесконечно возрастать, так как $\lambda < 1$. Но это означало бы наличие потока, идущего из области положительных τ к отрицательным, т. е., говоря физически, наличие внешних источников на положительной бесконечности, что противоречит нашим допущениям.

Поэтому, при источниках энергии, удаленных в область бесконечно больших отрицательных τ , имеем:

$$B(\tau) = C_1 e^{-k\tau}. \quad (18)$$

Для потока мы получим:

$$H(\tau) = -\frac{4\pi}{k} \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) e^{-k\tau} + C_2.$$

Однако постоянная C_2 должна равняться нулю, так как при $\tau \rightarrow \infty$ и $H(\tau) \rightarrow 0$. Итак, поток имеет отрицательное значение, т. е. направлен вниз и равен

$$H(\tau) = -\frac{4\pi}{k} \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) e^{-k\tau}. \quad (19)$$

Абсолютное значение потока уменьшается при увеличении τ вследствие наличия истинного поглощения. Решение (18), являющееся точным для двусторонней бесконечности, мы и примем за исходное приближение при рассмотрении проблемы односторонней бесконечности.

§ 3. Сравнение с результатом приближенного решения по методу Эддингтона

Для сравнения приведем решение той же задачи по методу Эддингтона. Мы имеем из уравнения переноса путем умножения его на $\cos \theta$ и интегрирования по всем направлениям:

$$\frac{d}{d\tau} \int I \cos^2 \theta d\omega = H. \quad (20)$$

В методе Эддингтона среднее значение $\cos^2 \theta$ принимается равным $1/3$, и поэтому, а также в силу условия лучевого равновесия, мы можем написать:

$$\frac{4\pi}{3\lambda} \frac{dB}{d\tau} = H, \quad (21)$$

что вместе с (16) дает

$$\frac{d^2 B}{d\tau^2} = 3(1 - \lambda)B. \quad (22)$$

Решение этого уравнения можно представить также в виде

$$B = C_0 e^{-k\tau} + C_1 e^{k\tau}, \quad (23)$$

где $k = \sqrt{3(1-\lambda)}$, или

$$\lambda = 1 - \frac{k^2}{3}. \quad (24)$$

Эта формула дает совпадающие с (12) значения только для малых k (т. е. λ , близких к единице), когда можно пренебречь k^4 . При λ , сколько-нибудь заметно отличающихся от единицы, разница между (12) и (24) дает большую разницу в B , так как k , являющаяся функцией λ , входит в показатель решения (11). Вычисление показывает, что уже при $\lambda = 0,9$ формула (24) для k приводит к результатам для B , даже на умеренных глубинах (τ порядка 10), в десятки раз отличающимся от правильных, полученных на основании (12).

Таким образом, для $\lambda \leq 0,9$ приближение Эддингтона никак не может быть применено, особенно при исследовании светового режима на больших оптических глубинах.*

* О характере ошибки при применении приближенных дифференциальных уравнений в случае чистого рассеяния ($\lambda = 1$) см. Болдырев и Александров. Труды Гос. опт. института, II, вып. 99, 65, 1936.

§ 4. Причина неприменимости приближения Эддингтона

В приближении Эддингтона среднее значение $\cos^2\theta$ в (20) принимается равным $1/3$ и этим обусловлено значение $k = \sqrt{3(1-\lambda)}$; если среднее значение $\cos^2\theta$ принять другим, то и показатель k примет другое значение. Но очевидно, что когда $B(\tau)$, т. е. испускательная способность падает экспоненциально при возрастании τ , излучение в каждой точке далеко от изотропности. Излучение, идущее сверху ($\theta = \pi$; $\cos\theta = -1$), доминирует. Поэтому $\overline{\cos^2\theta} > 1/3$. Только при очень малых значениях k излучение в каждой точке будет близким к изотропности, и можно принять $\overline{\cos^2\theta} = 1/3$. В этом заключается причина того, что приближение Эддингтона не может быть применено при k , не очень малых по сравнению с единицей, т. е. при заметном поглощении. Аналогичное обстоятельство имеет место в случае приближения Шварцшильда—Шустера. Заметим, наконец, что в случае планетных атмосфер, так же как и в случае большинства мутных жидкостей, λ заметно отличается от единицы. Если бы λ было очень близко к единице, то альbedo планеты было бы также весьма близко к единице. Наблюдения же показывают, что этого нет*.

§ 5. Точное уравнение для случая односторонней бесконечности

Для того чтобы получить решение нашей задачи, применимое и к слоям, близким к границе атмосферы, т. е. расположенным на небольшой оптической глубине, мы уже должны рассмотреть более трудную для изучения модель односторонней бесконечности, в которой оптическая глубина меняется от 0 до ∞ . Оптическая глубина будет теперь у нас отсчитываться от внешней границы атмосферы вглубь. Слой $\tau = 0$ будет соответствовать самой внешней границе. Очевидно, что в этом случае нужно учитывать излучение, идущее снаружи. Пусть по-прежнему I есть интенсивность диффузного излучения в нашей среде, не включающая в себе интенсивность излучения от внешних объектов. Пусть мы имеем определенный поток энергии, падающий от внешних источников на единицу площади слоя $\tau = 0$. Это прямое излучение при прохождении в глубину будет ослабляться. Если, например, источник излучения находится настолько далеко, что лучи, исходящие от разных точек его поверхности, можно счи-

* Альbedo планеты зависит не только от λ , но и от индикатрисы рассеяния. При сильно вытянутой вперед индикатрисе рассеяния альbedo может быть значительно меньше единицы даже в том случае, когда λ очень близко к единице. *Ред.*

тать параллельными между собой, а вся его видимая поверхность занимает малый телесный угол $\Delta\omega_1$, то количество энергии, впервые рассеиваемое единицей объема в поверхностных слоях, где прямые лучи еще не ослаблены, будет равно $\sigma I_0 \Delta\omega_1$, а на глубине τ это количество будет уже равно $\sigma I_0 \Delta\omega_1 e^{-\tau \sec \theta_0}$, где θ_0 есть угол, образованный направлением лучей внешнего источника с внутренней нормалью к слоям. Удобно обозначать $I_0 \Delta\omega = \pi S$. Тогда количество энергии, рассеиваемое единицей объема в единицу времени, будет равно

$$\sigma \pi S e^{-\tau \sec \theta_0}.$$

Это будет, так сказать, „плотность источников рассеянного излучения“.

Рассмотрим другой пример, когда на границу $\tau = 0$ падает извне *изотропное* излучение интенсивности I_0 .

В этом случае количество энергии прямого излучения, превращаемое впервые в рассеянное на глубине τ в единице объема, будет:

$$\tau I_0 \int e^{-\tau \sec \theta} d\omega = 2\pi \tau I_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\tau \sec \theta} \sin \theta d\theta = 2\pi \tau I_0 E i_2 \tau,$$

где

$$E i_2 \tau = \int_1^{\infty} e^{-\tau y} \frac{dy}{y^2}.$$

Во всех рассматриваемых случаях мы можем написать количество впервые рассеиваемой единицей объема энергии прямого излучения в виде: $\pi S \sigma g(\tau)$.

Тогда и условие лучевого равновесия можно будет написать вместо (4) в виде:

$$4\pi \eta(\tau) = \sigma \int I d\omega + \pi S \sigma g(\tau), \quad (25)$$

или

$$B(\tau) = \frac{\lambda}{4\pi} \int I d\omega + \frac{\lambda}{4} S g(\tau). \quad (26)$$

Обозначим, далее,

$$\frac{\lambda}{4} S g(\tau) = f(\tau). \quad (27)$$

С другой стороны, входящий в (26) интеграл равен:

$$\frac{1}{4\pi} \int Id\omega = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} Ei|\tau - t| B(t) dt,$$

как это следует из решения уравнения переноса и предельных условий. Поэтому (26) представляется в виде:

$$B(\tau) = f(\tau) + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} Ei|\tau - t| B(t) dt. \quad (28)$$

Это и есть основное неоднородное интегральное уравнение нашей проблемы (уравнение О. Д. Хвольсона).

Как уже указывалось выше, мы будем решать это уравнение последовательными приближениями, взяв за исходное приближение такую функцию, которая хорошо представляет решение на больших глубинах. Такой функцией является, как мы видели,

$$B_0(\tau) = Ce^{-k\tau}. \quad (29)$$

Значение постоянной C при этом не будет произвольным, а должно быть выбрано так, чтобы (28) удовлетворялось по возможности более точно. Мы потребуем такого значения C , чтобы исходное приближение $B_0(\tau)$ удовлетворяло уравнению (28) „в среднем“, т. е. чтобы интегралы, распространенные на всю область от обеих частей уравнения (28), были бы равны. Иными словами, чтобы

$$\int_0^{\infty} B_0(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} f(\tau) d\tau + \lambda \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2} Ei_2\tau\right) B_0(\tau) dt, \quad (30)$$

так как

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} Ei|\tau - t| d\tau = 1 - \frac{1}{2} Ei_2t.$$

Поэтому

$$C = \frac{\int_0^{\infty} f(\tau) d\tau}{\int_0^{\infty} \left[(1 - \lambda) + \frac{\lambda}{2} Ei_2\tau \right] e^{-k\tau} d\tau}$$

или

$$C = \frac{k \int_0^{\infty} f(\tau) d\tau}{1 - \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2k} \ln(1+k)}.$$

Путем преобразования получим, пользуясь (12),

$$C = - \frac{\ln(1+k) - \ln(1-k)}{k + \ln(1-k)} k \int_0^{\infty} f(\tau) d\tau.$$

Дальнейшее вычисление и переход к следующему приближению нужно производить для каждого частного случая в отдельности. Суть же метода будет заключаться в том, что, подставляя в правую часть (28) вместо $B(\tau)$ его выражение в первом приближении, получим второе приближение для $B(\tau)$ и так далее.

§ 6. Освещение параллельным пучком

В этом случае

$$f(\tau) = \frac{\lambda}{4} S e^{-\tau \sec \theta_0}. \quad (31)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} C &= - \frac{\ln(1+k) - \ln(1-k)}{k + \ln(1-k)} \frac{\lambda}{4} k S \cos \theta_0 = \\ &= - \frac{k^2}{k + \ln(1-k)} \frac{1}{2} S \cos \theta_0. \end{aligned} \quad (32)$$

Теперь мы можем вычислить в первом приближении распределение яркости по диску планеты. Для интенсивности излучения, выходящего под углом β к нормали, мы будем иметь в первом приближении

$$I_0(0, \beta) = \int_0^{\infty} e^{-\tau \sec \beta} B_0(\tau) \sec \beta d\tau.$$

Подставляя сюда вместо $B_0(\tau)$ выражение (11), получаем:

$$I_0(0, \beta) = \frac{C \sec \beta}{k + \sec \beta}. \quad (33)$$

или

$$I_0(0, \beta) = -\frac{1}{2} k^2 S \frac{1}{k + \ln(1-k)} \frac{\cos \theta_0}{1 + k \cos \beta}. \quad (34)$$

В противостоянии планеты $\theta_0 = \beta$. Поэтому

$$I_0(0, \beta) = -\frac{1}{2} S \frac{k^2}{k + \ln(1-k)} \frac{\cos \beta}{1 + k \cos \beta}. \quad (35)$$

Это и есть теоретическое распределение энергии по диску в исходном приближении.

Для того чтобы получить решение во втором приближении, подставим в правую часть (28) вместо $B(\tau)$ выражение (29) для $B_0(\tau)$. Иными словами, вычислим второе приближение:

$$B_1(\tau) = f(\tau) + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} Ei|\tau - t| B_0(t) dt. \quad (36)$$

Получаем:

$$B_1(\tau) = f(\tau) + C e^{-k\tau} - \frac{\lambda C}{2k} [e^{-k\tau} Ei(1-k)\tau - Ei\tau], \quad (37)$$

где C по-прежнему определяется через (32).

Это дает возможность определить распределение яркости во втором приближении путем вычисления интеграла:

$$I_1(0, \beta) = \int_0^{\infty} e^{-\tau \sec \beta} B_1(\tau) \sec \beta d\tau.$$

Получаем:

$$I_1(0, \beta) = \frac{C}{1 + k \cos \beta} + \frac{\lambda}{4} S \frac{\sec \beta}{\sec \theta_0 + \sec \beta} - \frac{\lambda C}{2k} \frac{\sec \beta}{k + \sec \beta} \ln \frac{1 + \sec \beta}{1 - k} + \frac{\lambda C}{2k} \ln(1 + \sec \beta). \quad (38)$$

Путем небольшого преобразования (38) приводится к виду:

$$I_1(0, \beta) = \frac{C \sec \beta}{k + \sec \beta} + \frac{\lambda}{4} S \frac{\sec \beta}{\sec \theta_0 + \sec \beta} + \frac{\lambda C}{2k} \ln(1 - k) + \frac{\lambda C}{2} \frac{1}{k + \sec \beta} \ln \frac{1 + \sec \beta}{1 - k}. \quad (39)$$

Подставим сюда вместо C его значение и примем во внимание, что в противостоянии планеты $\theta_0 = \beta$. Мы получаем распределение энергии по диску планеты в противостоянии:

$$I_1(0) = \frac{1}{2} S \left[\frac{A}{k + \sec \beta} + \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda A \ln(1-k)}{2k} \cos \beta + \frac{\lambda A \cos \beta}{2(k + \sec \beta)} \ln \frac{1 + \sec \beta}{1 - k} \right], \quad (40)$$

где

$$A = - \frac{k^2}{k + \ln(1-k)}. \quad (41)$$

Выражение (40) дает распределение энергии по диску планеты во втором приближении. Надо думать, что оно довольно хорошо представляет точное решение задачи, ибо выражение $B_1(\tau)$, на котором оно основано, является хорошим приближением к точному решению $B(\tau)$ не только для $\tau > 1$, как $B_0(\tau)$, но уже и для малых значений τ .

Интересно сравнить результат, получаемый из (40) в предельном случае, когда $\lambda = 1$, т. е. $k = 0$, представляющем собой случай чистого рассеяния, с результатом, получаемым путем приближенного решения уравнения переноса. Как уже указывалось, при λ , равном или близком к единице, метод приближенного решения уравнения переноса (по Эддингтону или Шварцшильду) применим.

Из (40) путем раскрытия неопределенностей получаем, когда $k = 0$ и $\lambda = 1$,

$$I(0, \beta) = \frac{1}{2} S \left[\frac{1}{4} + \cos \beta + \cos^2 \beta \ln(1 + \sec \beta) \right]. \quad (42)$$

Что касается распределения яркости, получаемого из приближенного решения уравнений переноса, то оно формально совершенно совпадает с решением, получаемым в вопросе об отражении света в затмевающихся переменных. Как известно, по Милну, это решение имеет вид (см., например, Амбарцумян, Теоретическая астрофизика, стр. 33):

$$I(0, \beta) = \frac{1}{2} S \left(\cos \beta + \frac{1}{2} \right)^2. \quad (43)$$

Иными словами, вся разница заключается в том, что в (42) входит при $\cos^2 \beta$ вместо единицы множитель $\ln(1 + \sec \beta)$, который медленно меняется и для малых β , где член $\cos^2 \beta$ играет вообще роль, порядка единицы.

Отношение центра к краю получается по (42) порядка 8, вместо 9 по (43). Такое совпадение является хорошим контролем качества полученного приближения. Что касается сравнения формулы (40) с наблюдениями, мы этим здесь заниматься не будем. Приводим лишь таблицу теоретических значений коэффициентов яркости в противостоянии планеты при трех значениях λ ($\lambda = 1,00, 0,864, 0,728$) (см. табл. 1).

Таблица 1
Теоретические коэффициенты яркости в противостоянии планеты при сферической индикатриссе рассеяния и при различных значениях λ

k, λ	$k=0.0$ $\lambda=1.0$	$k=0.6$ $\lambda=0.864$	$k=0.8$ $\lambda=0.728$
β			
0°	0.972	.304	0.198
10	.970	.303	.200
20	.975	.313	.205
30	.975	.333	.219
40	.983	.358	.236
50	.999	.395	.265
60	1.024	.456	.314
70	.082	.591	.415
80	.382	.933	.657
90	∞	∞	∞

§ 7. Освещение диффузным светом

В этом случае

$$f(\tau) = \frac{\lambda}{2} I_0 E i_2 \tau. \quad (44)$$

Поэтому

$$C = - \frac{k^2}{k + \ln(1-k)}. \quad (45)$$

Когда мы имеем мутную среду, освещенную снаружи диффузным светом, например море, освещенное облачным небом, прежде всего наибольший интерес представляет вопрос о том, какой процент поступающей в среду радиации выходит из среды назад. Для этого нужно вычислить поток выходящего из среды излучения. На границе, при $\tau=0$, поток равен:

$$H(0) = \int I \cos \theta d\omega = \int \cos \theta d\omega \int_0^{\infty} e^{-\tau \sec \theta} B(\tau) \sec \theta d\tau.$$

Переставляя порядок интегрирования, получаем:

$$H(0) = 2\pi \int_0^{\infty} E i_2 \tau B(\tau) d\tau. \quad (46)$$

Подставляя сюда вместо $B(\tau)$ выражение $Ce^{-k\tau}$, получаем:

$$H(0) = \frac{2\pi C}{k} \left[1 - \frac{1}{k} \ln(1+k) \right],$$

или, в силу (45),

$$H(0) = \pi I_0 \frac{\ln(1+k) - k}{\ln(1-k) + k}. \quad (47)$$

Разделив на входящий поток πI_0 , получим для альбеда жидкости выражение:

$$a = \frac{\ln(1+k) - k}{\ln(1-k) + k}. \quad (48)$$

В частном случае, когда $\lambda=1$, т. е. $k=0$, мы имеем $a=1$.

Иными словами, среда, в которой отсутствует поглощение, имеет альбеда, равное единице, что ясно из физических соображений, без вычислений.

Зависимость a от λ , вычисленная на основании (48) и (12), дана в табл. 2.

Таблица 2

λ	k	a
1,00	0,00	1,00
0,99	0,20	0,78
0,94	0,40	0,57
0,86	0,60	0,41
0,73	0,80	0,26
0,61	0,90	0,18
0,00	1,00	0,00

Надо, однако, заметить, что второе приближение, значительно улучшающее значение B для малых τ , должно заметно улучшить и получающиеся численные значения альбеда, поскольку альбеда сильно зависит от освещенности слоев с малыми τ . Отметим далее, что мы здесь не учитывали отражающего свойства поверхности жидкости, которое должно сказаться двояко: 1) путем отражения части потока, идущего извне, и 2) путем внутреннего отражения лучей, идущих изнутри, что влияет на весь световой режим. Однако мы здесь этими

вопросами не будем заниматься, так как наша цель дать лишь общую постановку задачи.

Рассмотрев случай сферической индикатрисы рассеяния, перейдем к случаю асферической индикатрисы, когда рассеяние света производится неравномерно во все стороны.

§ 8. Случай асферической индикатрисы рассеяния

Исходным уравнением у нас опять будет условие лучевого равновесия (1)

$$\eta(\theta, \varphi) = \frac{\sigma}{4\pi} \int x(\cos \gamma) I(\theta', \varphi') d\omega', \quad (1)$$

где γ есть угол между направлениями θ, φ и θ', φ' , определяемый равенством:

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi'). \quad (49)$$

Что касается равенств (2), нормирующих индикатрису рассеяния, то их можно переписать также в виде:

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi x(\cos \gamma) \sin \gamma d\gamma = 1. \quad (50)$$

В дальнейшем мы будем иметь в виду такие поля излучения, в которых интенсивность зависит только от угла θ (зенитное расстояние) и не зависит от азимута φ . Тогда и η будет зависеть только от θ . Необходимым условием для этого в случае наличия внешнего освещения является то, чтобы интенсивность наружного излучения зависела только от θ .

Рассмотрим элемент объема dV . Из излучения, заключенного в телесном угле $d\omega'$, он рассеивает во все стороны в единицу времени количество

$$\sigma I(\theta') dV d\omega'.$$

Для того чтобы получить ту долю этой энергии, которая рассеяна внутри телесного угла $d\omega$, нужно помножить это количество на $x(\cos \gamma) \frac{d\omega}{4\pi}$, где γ угол между направлениями θ, φ и θ', φ' . Иными словами, мы будем иметь:

$$\sigma dV I(\theta') x(\cos \gamma) \frac{d\omega}{4\pi} d\omega',$$

или

$$\sigma dVI(\theta') x(\cos \gamma) \frac{\sin \theta d\theta d\varphi}{4\pi} \sin \theta' d\theta' d\varphi'.$$

Зададимся целью выяснить, какое количество энергии, имеющей направления, заключенные внутри $d\omega'$, рассеивается в направлениях, заключенных между альмукантаратами θ и $\theta + d\theta$.

Очевидно, это количество равно:

$$\sin \theta' d\theta' d\varphi' \sigma dVI(\theta') \frac{\sin \theta d\theta}{4\pi} \int_0^{2\pi} x(\cos \gamma) d\varphi,$$

или

$$\sin \theta' d\theta' d\varphi' \sigma dVI(\theta') \frac{\sin \theta d\theta}{2} p(\theta, \theta'), \quad (51)$$

где

$$p(\theta, \theta') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\cos \gamma) d\varphi. \quad (52)$$

Очевидно, что выражение $p(\theta, \theta')$ не зависит не только от φ , но и от φ' .

Физически можно определить $p(\theta, \theta')$ как функцию, которая показывает, как распределяется после рассеяния по зенитным расстояниям θ излучение, которое до рассеяния имело зенитное расстояние θ' .

Интегрируя (52) по θ , получаем, на основании (2), условие нормировки:

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi} p(\theta, \theta') \sin \theta d\theta = 1. \quad (53)$$

Кроме того, заметим, что функция $p(\theta, \theta')$ симметрична по отношению к θ и θ' , т. е.

$$p(\theta, \theta') = p(\theta', \theta). \quad (54)$$

Введенная таким образом функция $p(\theta, \theta')$ обладает рядом весьма важных свойств, рассмотренных в следующем параграфе. Ее введение весьма облегчает решение всей проблемы рассеяния при асферической индикатрисе.

§ 9. Свойства функции $p(\theta, \theta')$

Рассмотрим некоторые свойства функции $p(\theta, \theta')$, определенной, согласно (52), через:

$$p(\theta, \theta') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')) d\varphi.$$

Свойство 1. Рассмотрим, чему равно $p(0, \theta')$.

$$p(0, \theta') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\cos \theta') d\varphi = x(\cos \theta'), \quad (55)$$

т. е. $p(0, \theta')$ есть индикатриса рассеяния.

Свойство 2. Разложим индикатрису рассеяния $x(\cos \gamma)$ в ряд по полиномам Лежандра от аргумента $\cos \gamma$.

$$x(\cos \gamma) = \sum_i x_i P_i(\cos \gamma). \quad (56)$$

При этом мы будем брать полиномы Лежандра в такой нормировке, когда $P_i(1) = 1$. Коэффициенты разложения x_i могут быть вычислены, если известна сама индикатриса рассеяния.

Но из теории шаровых функций известно, что

$$P_i(\cos \gamma) = P_i(\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')) \quad (57)$$

должно представлять собой шаровую функцию Лапласа i -го порядка $Y_i(\theta, \varphi; \theta', \varphi')$. При этом аргументами мы можем считать как пару переменных θ и φ , так и пару θ' и φ' . В первом случае коэффициенты шаровой функции будут зависеть от θ' и φ' , как от параметров, во втором — от θ и φ . Имея это в виду, вычислим интеграл.

$$\int_0^\pi p(\theta, \theta') P_k(\theta) \sin \theta d\theta.$$

Он, очевидно, равен:

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi p(\theta, \theta') P_k(\theta) \sin \theta d\theta = \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi P_k(\theta) \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} x(\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')) d\varphi. \end{aligned}$$

Подставляя сюда вместо $x(\cos \gamma)$ его разложение (56), находим:

$$\int_0^\pi p(\theta, \theta') P_k(\theta) \sin \theta d\theta = \sum_i \frac{x_i}{2\pi} \int_0^\pi P_k(\theta) \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} Y_i(\theta, \varphi; \theta', \varphi') d\varphi =$$

$$= \sum_i x_i \frac{1}{2\pi} \int Y_i(\theta, \varphi; \theta', \varphi') P_k(\theta) d\omega. \quad (58)$$

Но из свойств шаровых функций нетрудно видеть, что шаровая функция Лапласа i -го порядка, коэффициенты которой зависят от некоторых независимых параметров θ и φ , будучи помножена на любую функцию этих параметров и проинтегрирована по этим параметрам в некоторых пределах, должна снова дать некоторую шаровую функцию i -го порядка от своих аргументов θ' и φ' . Это вытекает из того, что любая линейная комбинация шаровых функций i -го порядка есть также шаровая функция i -го порядка. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi} \int Y_i(\theta, \varphi; \theta', \varphi') P_k(\theta) d\omega = \bar{Y}_i(\theta', \varphi'),$$

где $\bar{Y}_i(\theta', \varphi')$ какая-то шаровая функция i -го порядка. Заметим, далее, что в правой части (58) все члены, для которых $i \neq k$, обратятся в нуль, так как $P_k(\theta)$ есть частный случай шаровой функции Лапласа k -го порядка. Поэтому

$$\int_0^\pi p(\theta, \theta') P_k(\theta) \sin \theta d\theta = x_k \bar{Y}_k(\theta', \varphi'). \quad (59)$$

Поскольку левая часть не зависит от φ' , от нее не должна зависеть и правая часть. Это означает, однако, что правая часть есть шаровая функция Лапласа k -го порядка, зависящая только от θ' , т. е. полином Лежандра от θ' . Мы можем поэтому положить:

$$\bar{Y}_k(\theta', \varphi') = c_k P_k(\theta').$$

Итак,

$$\int_0^\pi p(\theta, \theta') P_k(\theta) \sin \theta d\theta = x_k c_k P_k(\theta'). \quad (60)$$

Имея в виду, что $P(\theta, 0) = x(\cos \theta) = \sum x_i P_i(\theta)$, мы находим:

$$x_k \int P_k^2(\theta) \sin \theta d\theta = x_k c_k P_k(0),$$

т. е.

$$c_k = \int_0^\pi P_k^2(\theta) \sin \theta d\theta. \quad (61)$$

Таким образом, c_k представляет норму полинома P_k .

Если рассматривать функцию $p(\theta, \theta')$ как ядро интегрального уравнения

$$\psi(\theta) = \lambda \int_0^\pi p(\theta, \theta') \sin \theta \psi(\theta) d\theta,$$

то мы можем сказать, на основании (60), числа $\lambda = \frac{1}{c_k x_k}$ являются собственными значениями этого ядра. Им соответствуют собственные функции

$$\psi(\theta) = P_k(\theta).$$

Само ядро $p(\theta, \theta')$ мы можем представить в форме:

$$p(\theta, \theta') = \sum_i x_i P_i(\theta) P_i(\theta'). \quad (62)$$

Эти свойства функции $p(\theta, \theta')$ имеют весьма важное значение. Формула (53) является лишь частным случаем установленного свойства при $k=0$.

Будем также иметь в виду, что если в разложении (56) индикатрисы рассеяния можно приближенно ограничиться конечным числом членов, то и в разложении (62) функции $p(\theta, \theta')$ можем ограничиться также конечным числом членов, т. е. $p(\theta, \theta')$ будет представлять собой вырожденное ядро.

§ 10. Интегральное уравнение лучевого равновесия при асферической индикатрисе рассеяния

При сделанных выше предположениях о независимости I и η от φ уравнение (1), на основании (52), переписывается в виде:

$$\eta(\theta) = \frac{\sigma}{2} \int_0^\pi p(\theta, \theta') I(\theta') \sin \theta' d\theta'.$$

Обозначая $\frac{\eta}{\alpha}$ через $B(\tau, \theta)$, получаем:

$$B(\tau, \theta) = \frac{\lambda}{2} \int_0^\pi p(\theta, \theta') I(\theta') \sin \theta' d\theta'. \quad (63)$$

При двусторонней бесконечности имеем следующие выражения для $I(\theta')$:

$$\left. \begin{aligned} I(\theta') &= \int_{\tau}^{\infty} e^{-(t-\tau) \sec \theta'} B(t, \theta') \sec \theta' dt & \left(\theta' < \frac{\pi}{2} \right), \\ I(\theta') &= - \int_{-\infty}^{\tau} e^{-(t-\tau) \sec \theta'} B(t, \theta') \sec \theta' dt & \left(\theta' > \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

Поэтому интегральное уравнение лучевого равновесия получается в виде:

$$\begin{aligned} B(\tau, \theta) &= \frac{\lambda}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(\theta, \theta') \sec \theta' \sin \theta' d\theta' \int_{\tau}^{\infty} e^{-(t-\tau) \sec \theta'} B(t, \theta') dt - \\ &- \frac{\lambda}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} p(\theta, \theta') \sec \theta' \sin \theta' d\theta' \int_{-\infty}^{\tau} e^{-(t-\tau) \sec \theta'} B(t, \theta') dt. \end{aligned} \quad (65)$$

Это уравнение и подлежит решению*. Мы попытаемся найти решение для данного λ в форме:

$$B(\tau, \theta) = b(\theta) e^{-k\tau}. \quad (66)$$

Подстановка (66) в (65) приводит к тому результату, что (65) удовлетворяется в случае, если $b(\theta)$ является решением однородного интегрального уравнения:

$$b(\theta) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\pi} p(\theta, \theta') \frac{\operatorname{tg} \theta'}{k + \sec \theta'} b(\theta') d\theta',$$

или

$$b(\theta) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\pi} p(\theta, \theta') \frac{\sin \theta'}{1 + k \cos \theta'} b(\theta') d\theta'. \quad (67)$$

* Из прежних попыток написать интегральное уравнение лучевого равновесия при асферической индикатрисе упомяну работу Гуревича (Труды Гос. опт. института, XI, вып. 99, 72, 1936).

Вместо переменной θ' удобно ввести переменную $y' = \cos \theta'$ и вместо θ переменную $y = \cos \theta$. Тогда

$$b(y) = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^{+1} p(y, y') \frac{b(y')}{1 + ky'} dy'. \quad (68)$$

Задача заключается в том, чтобы определить при данном λ те значения k , при которых уравнение (68) имеет отличные от нуля решения, и найти эти решения.

В частном случае, когда имеем сферическую индикатрису рассеяния, уравнение (68) имеет решение $b(\theta) = \text{const}$ при значениях k , удовлетворяющих равенству:

$$\lambda = \frac{2k}{\ln \frac{1+k}{1-k}},$$

т. е. мы получаем прежний результат. Другие частные случаи мы рассмотрим в следующем параграфе.

§ 11. Некоторые частные случаи индикатрисы рассеяния

Рассмотрим простейший случай асферической и несимметричной индикатрисы рассеяния, когда она представляется в виде:

$$x(\cos \theta) = 1 + x_1 \cos \theta. \quad (69)$$

Тогда

$$p(\theta, \theta') = 1 + x_1 \cos \theta \cos \theta' = 1 + x_1 y y'. \quad (70)$$

Уравнение (68) тогда принимает вид:

$$b(y) = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{1 + x_1 y y'}{1 + ky'} b(y') dy'. \quad (71)$$

Ищем решение (71) в виде:

$$b(y) = b_0 + b_1 y. \quad (72)$$

Подставляя в (71), получаем как обычно для b_0 и b_1 систему линейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= \lambda \left[\frac{1}{2k} \ln \frac{1+k}{1-k} b_0 + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} \ln \frac{1+k}{1-k} \right) b_1 \right] \\ b_1 &= \lambda x_1 \left[\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} \ln \frac{1+k}{1-k} \right) b_0 - \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{2k^3} \ln \frac{1+k}{1-k} \right) b_1 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

Введем сокращенное обозначение

$$\mu = \frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} \ln \frac{1+k}{1-k}. \quad (74)$$

Тогда

$$b_0 = \lambda [(1 - k\mu) b_0 + \mu b_1],$$

$$b_1 = \lambda x_1 \left[\mu b_0 - \frac{\mu}{k} b_1 \right],$$

или

$$(\lambda - \lambda k\mu - 1) b_0 + \lambda \mu b_1 = 0,$$

$$\lambda x_1 \mu b_0 - \left(\frac{\mu x_1}{k} \lambda + 1 \right) b_1 = 0.$$

Для того чтобы эта система имела решение, нужно, чтобы

$$\begin{vmatrix} \lambda(1 - k\mu) - 1, & \mu\lambda \\ \lambda x_1 \mu, & -\frac{\mu x_1}{k} \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Из этого уравнения можно найти значения λ при данном k . Затабулировав эти значения, можно, наоборот, находить значения k при данном λ .

Например, оказывается, что значению $k=0,8$ при $x_1=1$ соответствуют два значения λ : $\lambda=2,7$ и $\lambda=0,63$. Первое из этих значений, как не имеющее физического смысла, отпадает. Итак, при $k=0,8$ имеем $\lambda=0,63$. По табл. 2 замечаем, что при сферической индикатрисе рассеяния тому же самому значению λ соответствовало $k > 0,8$, т. е. более быстрое убывание плотности излучения при возрастании τ . Таким образом, при вытянутой индикатрисе рассеяния $x(\gamma) = 1 + \cos \gamma$ излучение проникает глубже, чем при сферической индикатрисе, что вполне понятно физически. Соответствующее решение для $B(\tau, \theta)$ будет иметь вид:

$$B(\tau, \theta) = C(1 - 0,4 \cos \theta) e^{-0,8\tau}.$$

Значение постоянной C в каждой задаче нужно по-прежнему подбирать таким, чтобы уравнение для односторонней бесконечности по возможности лучше удовлетворялось.

В случае Релеевской индикатрисы рассеяния мы будем иметь представление индикатрисы как суммы полиномов Лежандра нулевого и второго порядка. Соответственно будет выражаться и функция $p(\theta, \theta')$. Поэтому наш метод позволяет произвести анализ и этого случая.

§ 12. Случай чистого рассеяния

В случае чистого рассеяния ($\lambda = 1$), при любой индикатрисе, мы имеем решение: $k = 0$; $b(\theta) = \text{const}$. Имея точное решение задачи с двусторонней бесконечностью для этого случая, мы можем перейти к решению задачи с односторонней бесконечностью, соответствующей реальной действительности. Мы имеем для этого случая уравнение:

$$B(\tau, \theta) = f(\tau, \theta) + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(\theta, \theta') \operatorname{tg} \theta' d\theta' \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} e^{-(t-\tau) \sec \theta'} B(t, \theta') dt - \\ - \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} p(\theta, \theta') \operatorname{tg} \theta' d\theta' \int_0^{\tau} e^{-(t-\tau) \sec \theta'} B(t, \theta') dt. \quad (75)$$

Подставляя в правую часть вместо $B(t, \theta')$ решение двусторонней задачи $B(t, \theta') = \text{const} = C$, получаем в следующем приближении:

$$B_1(\tau, \theta) = f(\tau, \theta) + C - \frac{C}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} p(\theta, \theta') \sin \theta' e^{\tau \sec \theta'} d\theta'. \quad (76)$$

Как видим, $B_1(\tau, \theta)$ отличается от исходного приближения на поправку

$$f(\tau, \theta) - \frac{C}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} p(\theta, \theta') \sin \theta' e^{\tau \sec \theta'} d\theta'. \quad (77)$$

Выберем постоянную C так, чтобы эта поправка в среднем имела значение, равное нулю, т. е. чтобы интеграл от этой поправки, умноженной на $\sin \theta$, по всем θ и τ был бы равен нулю.

Получаем:

$$C = 2 \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{\infty} f(\tau, \theta) d\tau,$$

так как

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi} p(\theta, \theta') \sin \theta d\theta = 1.$$

Находим:

$$B_1(\tau, \theta) = f(\tau, \theta) + \int_0^\pi d\theta'' \sin \theta'' \int_0^\infty f(\tau, \theta'') \left[2 - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi p(\theta'', \theta') \sin \theta' e^{\tau \sec \theta'} d\theta' \right] d\tau. \quad (78)$$

Из формулы (77) имеем, что при $\tau \rightarrow \infty$, $B \rightarrow C$. Заметим, что метод учета рассеяний последовательных порядков при колоссальной вычислительной работе все же не может привести к этому весьма простому и физически понятному результату (см., напр., Шулейкин, Физика моря, стр. 392—398, 1933).

В случае, например, когда индикатриса рассеяния представляется в виде (69), мы можем представить (78) в виде:

$$B_1(\tau, \theta) = f(\tau, \theta) + [2 - Ei_2\tau - x_1 \cos \theta Ei_3\tau] \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^\infty f(\tau, \theta) d\tau, \quad (79)$$

где

$$Ei_3\tau = \int_1^\infty e^{-\tau y} \frac{dy}{y^3}.$$

Формула (79) и представляет решение для случая чистого рассеяния во втором приближении.

Заключение

Из приведенных выше примеров видно, что различные задачи теории рассеяния света в планетных атмосферах с успехом могут быть решены при помощи метода интегральных уравнений, который при надлежащем применении дает лучшие результаты, чем метод приближенного решения уравнений переноса. Во второй части этой работы мы дадим результаты применения изложенного здесь метода к некоторым конкретным индикатрисам рассеяния и соответствующие численные таблицы и формулы.

Примечание. Обещанная автором вторая часть этой работы в печати не появилась. Изложенный выше метод для случая двусторонней бесконечности был применен автором в работе „Новый способ расчета рассеяния света в мутной среде“ (см. стр. 222). Для случая односторонней бесконечности предложенный выше метод автором не применялся. Объясняется это по-видимому тем, что в дальнейшем В. А. Амбарцумян разработал гораздо более сильный метод, заключающийся в сведении интегральных уравнений к функциональным.

О РАССЕЯНИИ СВЕТА АТМОСФЕРАМИ ПЛАНЕТ*

Вопрос о рассеянии света мутными средами, в частности планетными атмосферами, был предметом большого числа теоретических исследований. Математическая трудность вопроса приводила к тому, что не было найдено даже приближенного решения задачи в удовлетворительной форме, так как применявшиеся методы приближения не всегда находились в соответствии с физическими условиями, встречающимися на практике.

Как известно, вопрос о распределении яркости по диску планеты сводится к проблеме диффузного отражения от плоского мутного слоя определенной оптической толщины. В свою очередь, вопрос о диффузном отражении от мутной среды решается на основе расчета светового режима в такой среде, освещенной наружными источниками, причем должны учитываться рассеяния не только первого, но и высших порядков.

В предыдущей работе [1] автором было дано точное решение идеализованной задачи о световом режиме в среде, простирающейся в бесконечность в обе стороны (двухсторонняя бесконечность) при любой форме индикатрисы рассеяния. Вместе с тем это решение послужило исходным приближением для нахождения решения проблемы односторонней бесконечности и диффузного отражения света методом последовательных приближений.

В настоящей работе дается новое и достаточно точное для практических целей решение задачи о диффузном отражении путем приведения ее к некоторому функциональному уравнению, легко разрешаемому численно. Особенностью нового метода является то, что величины, характеризующие отражательную способность, получаются из функционального уравнения непосредственно, без промежуточного этапа, каким обычно является вычисление различных функций, характеризующих световой режим во внутренних слоях среды.

* Астр. ж., 19, № 5, 30, 1942.

При этом, так же как и в предыдущей работе, мы можем не ограничиваться случаем сферической индикатрисы рассеяния. Однако, из соображений удобства, мы решили сосредоточить в настоящей статье изложение вопросов, связанных со случаем сферической индикатрисы рассеяния, отложив рассмотрение общего случая до следующей нашей работы. Попутно оказывается, как мы увидим, возможным разрешить формальную сторону вопроса о распределении энергии по диску Солнца.

1. Интегральное уравнение проблемы диффузного отражения

Пусть имеем плоскопараллельные слои материи, рассеивающей и поглощающей одновременно. Пусть эта среда заполняет полупространство (односторонняя бесконечность). Пусть далее отношение коэффициента рассеяния к коэффициенту экстинкции (т. е. к сумме коэффициентов поглощения и рассеяния) постоянно. Обозначим его через λ . Пусть на плоскую границу среды падает излучение под углом θ_0 к нормали. Обозначим величину потока излучения через единичную площадку, перпендикулярную к нему через πS .

Тогда, как известно, интегральное уравнение теории рассеяния в случае сферической индикатрисы имеет вид:

$$B(\tau) = \frac{\lambda}{4} S e^{-\tau \sec \theta_0} + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} E i |\tau - t| B(t) dt, \quad (1)$$

где $B(\tau) = \frac{\eta}{\alpha}$ есть отношение коэффициента излучения к коэффициенту экстинкции, а τ — оптическая глубина. Если известно решение уравнения (1), то интенсивность света, выходящего под углом θ_1 к нормали из среды, т. е. интенсивность диффузно-отраженного света, вычисляется по формуле:

$$I(\theta_1) = \int_0^{\infty} e^{-\tau \sec \theta_1} B(\tau) \sec \theta_1 d\tau. \quad (2)$$

Обычный метод решения проблемы заключается в том, что при заданном параметре θ_0 решается уравнение (1), и решение $B(\tau)$ подставляется в (2). Таким образом определяется I как функция угла падения θ_0 и отражения θ_1 . Из линейности задачи следует, что B , а следовательно и I будут пропорциональны S . Обозначим:

$$\frac{I}{S} = r(\theta_1, \theta_0).$$

Величина $r(\theta_1, \theta_0)$ не зависит от S , а зависит от обоих углов θ_1 и θ_0 .

Решение задачи о диффузном отражении и заключается в нахождении функции $r(\theta_1, \theta_0)$. Метод настоящей работы заключается в том, что составляется уравнение, определяющее непосредственно функцию $r(\theta_1, \theta_0)$, и ищется его решение.

2. Вывод функционального уравнения, определяющего функцию $r(\theta_1, \theta_0)$

Для удобства обозначим в уравнении (1) $\sec \theta_0$ через ξ и введем замену переменных: $\tau = \sigma + a$, $t = s + a$,

$$B(\sigma + a) = \frac{\lambda}{4} e^{-\xi(\sigma+a)} + \frac{\lambda}{2} \int_{-a}^{\infty} Ei|\tau - s| B(s + a) ds. \quad (3)$$

Для удобства мы положили на время $s = 1$.

Продифференцируем это уравнение по a :

$$B'(\sigma + a, \xi) - \frac{\lambda}{2} \int_{-a}^{\infty} Ei|\tau - s| B'(s + a, \xi) ds = -\frac{\lambda}{4} \xi e^{-\xi(\sigma+a)} + \frac{\lambda}{2} Ei(\tau + a) B(0, \xi),$$

где явно указана зависимость B от параметра $\xi = \sec \theta_0$. Полагая $a = 0$, получаем:

$$B'(\tau, \xi) - \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} Ei|\tau - s| B'(s, \xi) ds = -\frac{\lambda}{4} \xi e^{-\xi\tau} + \frac{\lambda}{2} Ei(\tau) B(0, \xi). \quad (4)$$

Но

$$Ei(\tau) = \int_1^{\infty} e^{-\tau\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta},$$

откуда следует, что правая часть уравнения (4) представляет собою суперпозицию членов того же типа, что и $e^{-\xi\tau}$, т. е. свободный член уравнения (4) складывается из слагаемых того же типа, что и сво-

бодный член уравнения (1). Вследствие линейности уравнения (4), это решение поэтому представится в виде суперпозиции решений уравнения (1). Именно:

$$B'(\sigma, \xi) = -\xi B(\sigma, \xi) + 2B(0, \xi) \int_1^{\infty} B(\sigma, \zeta) \frac{d\zeta}{\zeta}. \quad (5)$$

Помножая это уравнение на $e^{-\eta\sigma}$ и интегрируя по σ , находим:

$$\int_0^{\infty} e^{-\eta\sigma} B'(\sigma, \xi) d\sigma = -\xi \int_0^{\infty} e^{-\eta\sigma} B(\sigma, \xi) d\sigma + \\ + 2B(0, \xi) \int_1^{\infty} \frac{d\zeta}{\zeta} \int_0^{\infty} B(\sigma, \zeta) e^{-\eta\sigma} d\sigma. \quad (6)$$

Применяя к левой стороне интегрирование по частям, мы можем исключить производную функции B

$$\eta \int_0^{\infty} e^{-\eta\sigma} B(\sigma, \xi) d\sigma - B(0, \xi) = -\xi \int_0^{\infty} e^{-\eta\sigma} B(\sigma, \xi) d\sigma + \\ + 2B(0, \xi) \int_1^{\infty} \frac{d\zeta}{\zeta} \int_0^{\infty} B(\sigma, \zeta) e^{-\eta\sigma} d\sigma. \quad (7)$$

Но

$$\eta \int_0^{\infty} e^{-\eta\sigma} B(\sigma, \xi) d\sigma = I(\eta) = r(\eta, \xi),$$

поскольку мы приняли $s = 1$.

Поэтому (7) переписется в виде:

$$\frac{\xi + \eta}{\eta} r(\eta, \xi) = B(0, \xi) \left\{ 1 + \frac{2}{\eta} \int_1^{\infty} r(\eta, \zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} \right\}.$$

Обозначим теперь:

$$r(\eta, \xi) = \eta R(\eta, \xi).$$

Тогда $R(\eta, \xi)$ должна удовлетворять уравнению

$$(\xi + \eta) R(\eta, \xi) = B(0, \xi) \left\{ 1 + 2 \int_1^{\infty} R(\eta, \zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} \right\}. \quad (8)$$

С другой стороны, положив в уравнении (1) $\tau = 0$, мы имеем:

$$B(0, \xi) = \frac{\lambda}{4} \left\{ 1 + 2 \int_0^{\infty} Eit B(t, \xi) dt \right\},$$

или, заменяя Eit через интегральное представление,

$$B(0, \xi) = \frac{\lambda}{4} \left\{ 1 + \frac{2}{\xi} \int_1^{\infty} r(\xi, \zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} \right\}. \quad (9)$$

Заменяя $r = \eta R$, получаем:

$$B(0, \xi) = \frac{\lambda}{4} \left\{ 1 + 2 \int_1^{\infty} R(\xi, \zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} \right\}. \quad (9a)$$

Подставляя (9a) в (8), находим:

$$\begin{aligned} (\xi + \eta) R(\eta, \xi) &= \frac{4}{\lambda} B(0, \xi) B(0, \eta), \\ r(\eta, \xi) &= \frac{4}{\lambda} \frac{\eta}{\eta + \xi} B(0, \xi) B(0, \eta). \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, мы сразу видим, что в рассматриваемом случае сферической индикатрисы рассеяния функция $r(\eta, \xi)$, характеризующая диффузное отражение, представляется с точностью до множителя $\frac{\eta}{\eta + \xi}$ в виде произведения двух одинаковых функций, зависящих каждая только от одного аргумента. Заметим, что недавно Minnaert [2] в своей работе указал на то, что отношение $\frac{r(\eta, \xi)}{\eta}$ всегда должно быть симметричной функцией от η и ξ , независимо от индикатрисы рассеяния. В печатающейся ныне работе В. А. Фока [3] было впервые показано другим методом на основе исследования точного решения уравнения (1), что отношение $\frac{\eta + \xi}{\eta} r(\eta, \xi)$ представляет собою произведение некоторой функции от η на такую же функцию от ξ и получено представление этой функции через определенный интеграл, зависящий от параметра. Наша цель заключается теперь в выводе функционального уравнения для $B(0, \xi)$.

Подставляя (10) в правую часть уравнения (9a), мы находим для $B(0, \xi)$ уравнение:

$$B(0, \xi) = \frac{\lambda}{4} \left\{ 1 + \frac{8}{\lambda} B(0, \xi) \int_1^{\infty} \frac{B(0, \zeta)}{\xi + \zeta} \frac{d\zeta}{\zeta} \right\}.$$

Вместо $\xi = \sec \theta_0$ мы можем ввести аргумент $x = \frac{1}{\xi} = \cos \theta_0$ и обозначить:

$$\frac{2}{\sqrt{\lambda}} B(0, \xi) = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} B\left(0, \frac{1}{x}\right) = \varphi(x). \quad (11)$$

Тогда для $\varphi(x)$ находим функциональное уравнение.

$$\varphi(x) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \left\{ 1 + 2\varphi(x) x \int_0^1 \frac{\varphi(z)}{x+z} dz \right\}. \quad (12)$$

Теперь функцию $r(\eta, \xi)$ можно представить как функцию косинусов y и x :

$$r(y, x) = \frac{x}{x+y} \varphi(x) \varphi(y). \quad (13)$$

Таким образом, численное решение функционального уравнения (12) сразу дает нам возможность найти функцию диффузного отражения $r(y, x)$. В следующем параграфе приводится решение этого уравнения для различных λ .

Преимуществом излагаемого метода является, как мы видим, то обстоятельство, что не приходится вводить в вычисление функций, характеризующих световой режим внутри самой среды.

Отметим, наконец, что наш метод сведения интегрального уравнения (1) к функциональному уравнению посредством Лапласовского преобразования неизвестной функции может быть обобщен и на более широкий класс уравнений с ядрами, зависящими от разности $\tau - t$.

3. Решение функционального уравнения для $\varphi(x)$

Введем вместо φ функцию ψ , связанную с φ соотношением

$$\varphi(x) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \psi(x). \quad (14)$$

Тогда $\psi(x)$ удовлетворяет уравнению:

$$\psi(x) = 1 + \frac{\lambda}{2} x \psi(x) \int_0^1 \frac{\psi(z)}{x+z} dz. \quad (15)$$

При $\lambda < 1$ (практически при $\lambda < 0,95$) это уравнение удобно решать численно последовательными приближениями. В качестве нуле-

Таблица 1

Значения функции $\varphi(x) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \psi(x)$ при различных λ

$x \backslash \lambda$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,519	0,360	0,387	0,403	0,415	0,424	0,431	0,438	0,443	0,448	0,452	0,455
0,612	0,391	0,428	0,449	0,466	0,479	0,490	0,500	0,508	0,516	0,522	0,528
0,728	0,426	0,477	0,508	0,532	0,552	0,570	0,585	0,598	0,609	0,620	0,629
0,806	0,449	0,512	0,553	0,586	0,613	0,637	0,658	0,677	0,691	0,708	0,722
0,865	0,465	0,540	0,590	0,631	0,666	0,697	0,724	0,749	0,771	0,790	0,809
0,910	0,477	0,563	0,621	0,672	0,715	0,754	0,789	0,821	0,851	0,878	0,903
0,944	0,486	0,580	0,647	0,706	0,759	0,805	0,850	0,889	0,926	0,962	0,993
0,969	0,492	0,594	0,669	0,736	0,798	0,852	0,906	0,955	1,001	1,045	1,086
0,986	0,497	0,607	0,691	0,767	0,837	0,903	0,967	1,026	1,081	1,137	1,188
0,997	0,499	0,617	0,710	0,797	0,878	0,958	1,033	1,108	1,179	1,250	1,319
1,000	0,500	0,624	0,725	0,821	0,915	1,007	1,097	1,188	1,276	1,365	1,455

вого приближения примем: $\psi_0(x) = 1$. Подставим эту функцию вместо $\psi(x)$ в правую часть и проинтегрируем. Получим первое приближение:

$$\psi_1(x) = 1 + \frac{\lambda}{2} x \psi_0(x) \int_0^1 \frac{\psi_0(z) dz}{x+z}$$

и т. д. Все интегрирования нами производились по формуле Симпсона, и процесс велся до тех пор, пока $\psi_n(x)$ не совпадало с $\psi_{n-1}(x)$ с точностью до единицы третьего знака, что с избытком достаточно для целей современной астрофотометрии. Значения функции ψ в каждом из приближений определялись для значений $x = 0; 0,1; 0,2 \dots 1,0$.

Таков принцип метода. На самом деле процесс сходится гораздо быстрее, если взять за нулевое приближение не $\psi_0(x) = 1$, а некоторую численно заданную функцию от x , про которую заведомо известно, что она близка к решению. Так, например, из уравнения (15) прямо видно, что точное значение $\psi(0)$ равно единице. Пользуясь этим, мы можем принять за нулевое приближение линейную функцию типа:

$$\psi_0(x) = 1 + ax,$$

где постоянную a можно определить из условия, что интеграл от $\psi_0(x)$ по всему промежутку равен точному значению интеграла от искомой функции, т. е.

$$1 + \frac{a}{2} = \int_0^1 \psi(x) dx. \quad (16)$$

Точное значение интеграла от искомой функции может быть, как сейчас будет показано, легко определено из уравнения (15) непосредственно и тем самым из (16) может быть определено a .

Для вычисления $\int_0^1 \psi(x) dx$ проинтегрируем обе части уравнения (15)

$$\int_0^1 \psi(x) dx = 1 + \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\psi(x) \psi(z) z dz dx}{x+z}.$$

Замечая, что двойной интеграл в правой части равен

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \psi(x) \psi(z) dz dx = \frac{1}{2} \left[\int_0^1 \psi(x) dx \right]^2,$$

мы получаем квадратное уравнение для определения значения искомого интеграла, из которого

$$\int_0^1 \psi(x) dx = \frac{2}{\lambda} (1 - \sqrt{1 - \lambda}). \quad (17)$$

Для той же цели улучшения исходного приближения можно пользоваться процессами интерполяции и экстраполяции, если уже вычислено решение для двух достаточно удаленных значений λ . Небольшая практика в вычислениях быстро приводит к тому, что удается подобрать столь хорошее исходное приближение, что уже второе приближение отличается от первого всего на две, три единицы третьего знака после запятой.

При $\lambda > 0,95$ изложенный выше вариант метода последовательных приближений теряет свою практичность и лучше его модифицировать следующим образом:

под интегралом в (15) заменим:

$$\frac{x}{x+z} = 1 - \frac{z}{x+z}.$$

Тогда:

$$\psi(x) = 1 + \frac{\lambda}{2} \psi(x) \int_0^1 \psi(z) dz - \frac{\lambda}{2} \psi(x) \int_0^1 \frac{\psi(z) z dz}{x+z},$$

или, на основании (17),

$$\sqrt{1-\lambda} \psi(x) = 1 - \frac{\lambda}{2} \psi(x) \int_0^1 \frac{\psi(z) z dz}{x+z},$$

или

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda} + \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{\psi(z) z dz}{x+z}}. \quad (18)$$

Подставим в правую часть нулевое приближение $\psi_0(z)$, тогда получим некоторую функцию $\psi_1(z)$. Затем полусумму $\bar{\psi}(z) = \frac{1}{2} [\psi_0(z) + \psi_1(z)]$ вновь подставим в правую часть (18), получим некоторую функцию $\psi_2(z)$. Образует опять полусумму и т. д. При $\lambda > 0,95$ процесс быстро сходится.

Заметим кстати, что при $\lambda = 1$ уравнение (17) превращается в

$$\psi(x) \int_0^1 \frac{\psi(z) z dz}{x+z} = 2,$$

или

$$\frac{2}{x} \int_0^1 r(z, x) z dz = 1.$$

Помножая обе части этого равенства на πSx , находим, что это уравнение представляет собою условие равенства падающего и отраженного потока, т. е. условие, что при $\lambda = 1$ альbedo при всех углах падения равно единице.

4. Распределение яркости по диску планеты

Полученные результаты дают возможность определить распределение яркости по диску планеты в различных фазах. Особенно простой результат получается для случая, когда планета находится в противостоянии. В этом случае $\theta_1 = \theta_0$ и $y = x$. Поэтому, согласно (13),

$$r(y, x) = \frac{1}{2} [\varphi(x)]^2,$$

Таблица 2

Теоретическое распределение яркости по диску планеты при различных λ

$$r = \frac{1}{2} [\varphi(x)]^2$$

$\lambda \backslash x$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,519	0,065	0,075	0,081	0,086	0,090	0,093	0,096	0,098	0,100	0,102	0,104
0,612	0,076	0,092	0,101	0,108	0,114	0,120	0,125	0,129	0,133	0,137	0,140
0,728	0,091	0,112	0,129	0,141	0,152	0,162	0,171	0,179	0,186	0,192	0,198
0,806	0,101	0,131	0,153	0,172	0,188	0,203	0,216	0,229	0,241	0,251	0,261
0,865	0,108	0,146	0,174	0,199	0,222	0,243	0,262	0,280	0,297	0,312	0,327
0,910	0,114	0,158	0,193	0,226	0,256	0,284	0,311	0,337	0,362	0,385	0,408
0,944	0,118	0,168	0,209	0,249	0,288	0,324	0,361	0,395	0,429	0,463	0,493
0,969	0,121	0,176	0,224	0,271	0,318	0,363	0,410	0,456	0,501	0,546	0,590
0,989	0,124	0,184	0,239	0,294	0,350	0,408	0,468	0,526	0,584	0,646	0,706
0,997	0,125	0,190	0,252	0,318	0,385	0,459	0,534	0,614	0,695	0,781	0,870
1,000	0,125	0,195	0,263	0,337	0,419	0,507	0,602	0,705	0,814	0,931	1,058

где x есть косинус планетоцентрического углового расстояния от центра диска. Поэтому для интенсивности имеем:

$$I = \frac{1}{2} [\varphi(x)]^2 S. \quad (19)$$

Поскольку интенсивность (на языке визуальной фотометрии) абсолютно белой поверхности, перпендикулярной к лучам Солнца рассеивающей по закону Ламберта и находящейся на расстоянии планеты от Солнца, равна S , то можно сказать, что $\frac{1}{2} [\varphi(x)]^2$ есть отношение яркости в точке x диска и яркости такой воображаемой белой поверхности.

Наибольший контраст, т. е. наибольшее отношение центра к краю, получается в случае $\lambda = 1$, т. е. в случае чистого рассеяния. При стремлении λ к нулю диск планеты становится равномерным по яркости.

При сравнении полученных результатов с наблюдениями надо иметь в виду, что изложенная здесь теория относится прежде всего к газовым оболочкам и притом обладающим достаточной оптической толщиной. По-видимому, этим условиям удовлетворяют атмосферы Юпитера, Сатурна и Венеры. Далее мы пока разобрали лишь частный случай сферической индикатрисы рассеяния. Допускается также, что на различных точках поверхности планеты атмосфера обладает одинаковыми свойствами, т. е. мы отвлеклись от атмосферных деталей.

Вполне возможно и даже вероятно, что у реальных атмосфер планет индикатриса рассеяния вовсе не сферическая. Теоретический

расчет для несферических индикатрис будет нами приведен в другой работе. Имея в виду все приведенные оговорки, мы все же провели сравнение с наблюдениями для случая Юпитера. Для него имеются абсолютные измерения яркости на диске, опубликованные В. В. Шароновым [4].

Заметим, что наибольший смысл имеют сравнения именно с абсолютными определениями, потому что подобрать некоторое λ , при котором отношение центра к краю имеет наблюдаемое значение, всегда можно, если только это значение лежит между 1,0 и 8,0. Преимущество сравнений с абсолютными измерениями заключается в том, что по наблюдаемой яркости в центре диска ($x=1,0$) можно найти λ , а затем по найденному λ из теории автоматически определяется контраст. Именно по этой причине были взяты для сравнения наблюдения В. В. Шаронова. Поскольку наблюдения дают в центре диска $r=0,590$, то мы заключили, что для атмосферы Юпитера $\lambda=0,969$. Оказывается, что теоретическая кривая $\frac{1}{2} \varphi^2$ при $\lambda=0,969$ довольно хорошо представляет наблюдаемые значения яркости вдоль экваториального диаметра и только на самом краю диска расхождения превышают 11%. Поскольку для края диска наблюдения отягчены всегда большой ошибкой, то совпадение теоретической кривой с наблюдениями можно считать неожиданно хорошим.

5. Плоское альbedo

Введенные нами вспомогательные функции позволяют легко определить плоское альbedo среды, т. е. отношение потока, рассеянного средой, к потоку, падающему на нее. Очевидно, что вообще плоское альbedo зависит от угла падения.

Для потока, рассеянного на единицу площади среды, мы имеем:

$$H = \int I \cos \theta_1 d\omega_1 = S \int r(\theta_1, \theta_0) \cos \theta_1 d\omega_1,$$

где $d\omega_1$ — элемент телесного угла. Для потока падающей энергии мы имеем:

$$F = \pi S \cos \theta_0.$$

Для альbedo находим:

$$A = \frac{H}{F} = \frac{1}{\pi \cos \theta_0} \int r(\theta_1, \theta_0) \cos \theta_1 d\omega_1 = \frac{2}{\cos \theta_0} \int r(\theta_1, \theta_0) \cos \theta_1 \sin \theta_1 d\theta_1.$$

Так как

$$r(\theta_1, \theta_0) = R(\theta_1, \theta_0) \sec \theta_1,$$

то

$$A = \frac{2}{\cos \theta_0} \int R(\theta_1, \theta_0) \sin \theta_1 d\theta_1,$$

или

$$A = \frac{2}{y} \int_0^1 \frac{xy \varphi(y) \varphi(x)}{x+y} dx.$$

Преобразуя, находим:

$$A = 2\varphi(y) \int_0^1 \varphi(x) dx - 2\varphi(y) \int_0^1 \frac{y\varphi(x) dx}{x+y}.$$

Пользуясь (12), (14) и (17), мы преобразуем это равенство:

$$A = 1 - 2 \sqrt{\frac{1}{\lambda} - 1} \varphi(y). \quad (20)$$

Это и есть искомое выражение для альбедо. Табл. 3 содержит вычисленные, согласно (20), значения A в зависимости от косину-

Таблица 3
Значение плоского альбедо в зависимости от угла падения лучей и λ

$$A = 1 - 2 \sqrt{\frac{1}{\lambda} - 1} \varphi(y)$$

$y \backslash \lambda$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,519	0,307	0,255	0,224	0,201	0,183	0,170	0,156	0,146	0,137	0,130	0,124
0,612	0,376	0,318	0,274	0,257	0,236	0,218	0,201	0,190	0,177	0,168	0,158
0,728	0,478	0,414	0,378	0,348	0,324	0,302	0,284	0,257	0,254	0,240	0,230
0,806	0,560	0,498	0,458	0,426	0,399	0,376	0,355	0,336	0,320	0,306	0,292
0,865	0,633	0,573	0,535	0,502	0,474	0,450	0,428	0,408	0,391	0,376	0,361
0,910	0,700	0,646	0,610	0,573	0,551	0,526	0,505	0,484	0,466	0,448	0,433
0,944	0,763	0,717	0,685	0,656	0,680	0,608	0,586	0,567	0,549	0,531	0,516
0,969	0,825	0,788	0,762	0,738	0,716	0,697	0,677	0,660	0,644	0,628	0,614
0,986	0,883	0,857	0,837	0,819	0,802	0,787	0,772	0,758	0,745	0,732	0,720
0,997	0,949	0,936	0,926	0,917	0,909	0,900	0,893	0,885	0,877	0,870	0,863
1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

са угла падения y и параметра λ . Мы видим, что при косом падении альбедо больше, чем при нормальном. Это выражено резче при малых λ , т. е. для сред с малым альбедо.

6. Распределение энергии по диску Солнца и аналогичные задачи

Пусть опять мы имеем плоскопараллельные рассеивающие и поглощающие слои. Пусть вся среда имеет конечную оптическую толщину τ_0 . Пусть за этой средой расположены источники света. Тогда на передней границе среды мы будем иметь некоторый поток прошедшего через среду излучения. Будем увеличивать оптическую толщину среды, увеличивая одновременно яркость освещающих источников, находящихся за нею в такой пропорции, чтобы поток излучения, выходящего с передней границы, оставался постоянным. В пределе мы будем иметь среду, заполняющую полупространство, с источниками, расположенными бесконечно глубоко. Ставя вопрос о световом режиме в такой среде, мы приходим к однородному интегральному уравнению:

$$\bar{B}(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} E i|\tau - t| \bar{B}(t) dt. \quad (21)$$

В частности, при $\lambda = 1$ мы имеем случай чистого рассеяния, а соответствующая математическая задача превращается в задачу Милна. Это связано с тем, что поставленная в этом параграфе задача о рассеянии при $\lambda = 1$ математически эквивалентна проблеме лучевого равновесия фотосферы, хотя физический смысл происходящих в фотосфере процессов совершенно другой. Поэтому, получив для задачи (21) распределение выходящей интенсивности в зависимости от угла с нормалью, мы для $\lambda = 1$ тем самым будем иметь и распределение энергии по диску Солнца.

Интенсивность в зависимости от угла с нормалью определится уравнением:

$$r(\eta) = \int_0^{\infty} e^{-\eta t} \eta \bar{B}(t) dt, \quad (22)$$

где η есть секанс упомянутого угла. Как мы покажем, функция $r(\eta)$ также выражается через введенную ранее вспомогательную функцию φ .

В самом деле, путем дифференцирования легко получить из уравнения (21) уравнение для производной $\bar{B}'(\tau)$

$$\bar{B}'(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} E i|\tau - t| \bar{B}'(t) dt = \frac{\lambda}{2} E i\tau \bar{B}(0). \quad (23)$$

Поскольку

$$Ei\tau = \int_1^{\infty} e^{-\tau\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta},$$

мы можем получить решение уравнения (23) в виде суперпозиции решений уравнений типа (3), т. е.

$$\bar{B}'(\tau) = 2\bar{B}(0) \int_1^{\infty} B(\tau, \zeta) \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad (24)$$

где $B(\tau, \zeta)$ есть решение уравнения (3). Однако (24) есть только одно из решений уравнения (23). Общее решение этого неоднородного уравнения будет иметь вид:

$$\bar{B}'(\tau) = 2\bar{B}(0) \int_1^{\infty} B(\tau, \zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} + \mu \bar{B}(\tau), \quad (25)$$

где μ постоянная, которая должна быть выбрана так, чтобы правая часть (25) действительно равнялась производной от $\bar{B}(\tau)$. Помножая обе части (25) на $e^{-\eta\tau}$ и интегрируя, находим:

$$\int_0^{\infty} e^{-\eta\tau} B'(\tau) d\tau = 2 \frac{B(0)}{\eta} \int_1^{\infty} r(\eta, \zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{\mu}{\eta} r(\eta),$$

где $r(\eta, \zeta)$ имеет тот же смысл, что и в предыдущих параграфах. Интегрируя в левой части этого равенства, по частям находим:

$$\eta \int_0^{\infty} e^{-\eta\tau} B(\tau) d\tau = \bar{B}(0) \left\{ 1 + \frac{2}{\eta} \int_1^{\infty} r(\eta, \zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} \right\} + \frac{\mu}{\eta} r(\eta),$$

или

$$r(\eta) \left(1 - \frac{\mu}{\eta} \right) = \bar{B}(0) \left\{ 1 + 2 \int_1^{\infty} R(\eta, \zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} \right\}. \quad (26)$$

Подставляя сюда вместо $R(\eta, \tau)$ его значение, а также заменяя $\frac{1}{\eta}$ через y , а $\frac{1}{\zeta}$ через z , т. е. заменяя секансы косинусами, получаем:

$$r(y) = \frac{\bar{B}(0)}{1 - \mu y} \left\{ 1 + 2y \varphi(y) \int_0^1 \frac{\varphi(z) dz}{z + y} \right\}, \quad (27)$$

где $\varphi(z)$, введенная нами в § 2 и уже затабулированная функция. В силу функционального уравнения (12) мы можем переписать (27) в виде:

$$r(y) = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \frac{\bar{B}(0) \varphi(y)}{1 - \mu y}. \quad (28)$$

Мы видим, что искомая интенсивность излучения, выходящего под углом $\arcs \cos \psi$ к нормали, пропорциональна

$$\frac{\varphi(y)}{1 - \mu y}.$$

Теперь займемся определением параметра μ . Из уравнения (21) имеем:

$$\bar{B}(0) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} EitB(t) dt,$$

или

$$\bar{B}(0) = \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{d\zeta}{\zeta} \int_0^{\infty} e^{-t\zeta} \bar{B}(t) dt = \frac{\lambda}{2} \int_1^{\infty} \frac{r(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta = \frac{\lambda}{2} \int_0^1 r(y) dy.$$

Подставляя вместо $r(y)$ его выражение из формулы (28), находим уравнение для определения μ :

$$\sqrt{\lambda} \int_0^1 \frac{\varphi(y) dy}{1 - \mu y} = 1. \quad (29)$$

Из этого уравнения нужно определить μ в зависимости от λ . Оказывается, что решением этого уравнения является $\mu = k$, где k по-прежнему есть положительное число, связанное с λ соотношением:

$$\lambda = \frac{2k}{\ln \frac{1+k}{1-k}}. \quad (30)$$

Для доказательства этого рассмотрим ограниченное решение уравнения:

$$\frac{\lambda}{2} \int_1^{\infty} e^{-t\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta(\zeta - k)} = C(\tau) - \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} Eit|\tau - t| C(t) dt, \quad (31)$$

где k положительное число, удовлетворяющее уравнению (30). Решение этого уравнения можно рассматривать как суперпозицию решений уравнения (3) и поэтому:

$$C(\tau) = 2 \int_1^{\infty} \frac{B(\tau, \xi) d\xi}{\xi(\xi - k)}. \quad (32)$$

Помножая обе части (32) на $e^{-\eta\tau}$ и интегрируя, находим в прежних обозначениях:

$$\int_0^{\infty} C(\tau) e^{-\eta\tau} d\tau = 2 \int_1^{\infty} \frac{R(\eta, \xi) d\xi}{\xi(\xi - k)}. \quad (33)$$

Но, с другой стороны, мы можем написать явно единственное ограниченное решение уравнения (31). Оно равно:

$$C(\tau) = e^{-k\tau}. \quad (34)$$

Поэтому (33) переписывается в виде:

$$\frac{1}{k + \eta} = 2 \int_1^{\infty} \frac{\varphi(\eta) \varphi(\xi) d\xi}{\xi(\xi + \eta)(\xi - k)}.$$

Заменяя опять $\frac{1}{\eta} = y$ и $\frac{1}{\xi} = x$, находим:

$$\frac{1}{1 + ky} = 2\varphi(y) \int_0^1 \frac{x\varphi(x) dx}{(x + y)(1 - kx)}. \quad (35)$$

Интегрируя обе части по y , находим:

$$\frac{1}{k} \ln(1 + k) = 2 \int_0^1 \frac{x\varphi(x) dx}{1 - kx} \int_0^1 \frac{\varphi(y) dy}{x + y},$$

или в силу функционального уравнения (12):

$$\frac{1}{k} \ln(1 + k) = \int_0^1 \frac{\frac{2}{\sqrt{\lambda}} \varphi(x) - 1}{1 - kx} dx,$$

что приводит к равенству:

$$\frac{1}{k} \ln \frac{1 + k}{1 - k} = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \int_0^1 \frac{\varphi(x) dx}{1 - kx},$$

или, на основании (30),

$$\sqrt{\lambda} = \int_0^1 \frac{\varphi(x) dx}{1 - kx}.$$

Иными словами, действительно, корень уравнения (29) равен k . В частном случае чистого рассеяния, когда $\lambda = 1$, имеем, на основании (28),

$$r(y) = A\varphi(y),$$

где A — постоянная. Поскольку математически задача о распределении энергии по диску Солнца эквивалентна рассматриваемой в этом параграфе при $\lambda = 1$, то мы можем сказать, что $\varphi(y)$ при $\lambda = 1$ представляет собою распределение энергии по диску Солнца.

7. Вывод

Изложенный выше метод сведения интегрального уравнения к функциональному применим не только к интегральному уравнению рассеяния, но также и к другим уравнениям, в которых ядро зависит от разности своих аргументов. Весь ход рассуждений остается буквально тем же.

В другой работе мы дадим обобщение нашего метода на случай асферической индикатрисы рассеяния, когда задача сводится к системе функциональных уравнений, также сравнительно легко разрешаемых.

Астрономическая обсерватория Ленинградского университета

Декабрь 1941 — январь 1942

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Амбарцумян, Труды АО ЛГУ, **11**, 64, 1941.
2. Minnaert, Ap. J., **93**, 403, 1941.
3. В. А. Фок, Матем. сборник, **14** (56), № 1—2, 1944 (Ред.).
4. В. В. Шаронов, Цирк. Пулк. obs., № 30, 48, 1939.

Примечание. В оригинале этой статьи, помещенном в „Астрономическом журнале“, ошибочно (но не по вине автора) не были напечатаны таблицы, хотя ссылки на них в тексте имеются. В настоящем издании указанная ошибка исправлена.

НОВЫЙ СПОСОБ РАСЧЕТА РАССЕЯНИЯ СВЕТА В МУТНОЙ СРЕДЕ*

Задача о расчете светового режима в мутной среде, состоящей из плоскопараллельных слоев, является основной задачей не только гидрооптики, но и теории рассеяния в молочных стеклах, в планетных атмосферах и других оптически плотных средах.

Предлагавшиеся до сих пор способы решения этой задачи можно разбить на две группы: одни способы сводятся к последовательному вычислению рассеяний первого, второго и высших порядков, другие — к замене в дифференциальном уравнении переноса излучения входящего в него косинуса угла между направлением излучения и нормалью к слоям некоторым его средним значением (приближения Эддингтона и Шварцшильда).

Однако метод учета рассеяний последовательных порядков оказывается практически применимым только до рассеяния второго порядка. Расчет рассеяний третьего и высшего порядков наталкивается на практически непреодолимые вычислительные трудности. Между тем, на больших глубинах как прямой свет от источников освещения, так и рассеянный свет первого и второго порядков играют незначительную роль по сравнению с рассеянным светом высших порядков, и пренебречь последним невозможно.

Что касается приближенной замены в уравнении переноса косинуса угла его средним значением, то это, как показывает исследование, ведет в общем случае (при наличии одновременного рассеяния и поглощения) к большим ошибкам.

Метод, разработанный нами на астрономической обсерватории Ленинградского университета, также является приближенным, но он дает тем лучшие результаты, чем более глубокие слои мы рассматриваем. Сущность его заключается в следующем.

* „Изв. АН СССР“, сер. геогр. и геофиз., № 3, 97, 1942.

Поместим нульпункт высот на внешней границе рассеивающей среды. Оптическая глубина на высоте z определяется равенством:

$$\tau = \int_z^0 \alpha dz,$$

где α — коэффициент ослабления, являющийся функцией z .

При достаточно глубокой среде принимается, что τ изменяется от 0 до ∞ . В среду попадает внешнее излучение, которое ослабляется при проникновении в область больших τ . На больших глубинах мы уже имеем дело в основном не с прямым излучением внешних источников, а с потоком идущего вниз диффузного, т. е. многократно рассеянного в среде излучения.

Вместо этой реальной задачи мы рассматриваем сначала идеализованную задачу, в которой нет внешней границы и оптическая глубина τ изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. В этой задаче уже нигде нет прямого излучения внешних источников, а везде имеем дело с потоком диффузного излучения, идущего из области отрицательных τ в область положительных τ .

Поставленная таким образом идеализованная задача решена нами для любой формы индикатрисы рассеяния точно и до конца. Полученное решение довольно хорошо представляет и решение реальной задачи на больших оптических глубинах. Однако для слоев, близких к поверхности, это решение уже не точно, и мы можем подойти к решению реальной задачи (где τ меняется от 0 до ∞) путем последовательных приближений, приняв за первое приближение найденное точное решение идеализованной задачи (т. е. задачи двусторонней бесконечности).

Если $\eta(\tau, \theta, \varphi) d\omega$ — количество энергии, излучаемой в единицу времени единицей объема в телесном угле $d\omega$, то мы имеем основное уравнение нашей задачи двусторонней бесконечности:

$$\eta(\tau, \theta, \varphi) = \frac{\sigma}{4\pi} \int x(\gamma) I(\theta', \varphi') d\omega', \quad (1)$$

где $I(\theta', \varphi')$ — интенсивность излучения в направлении θ', φ' ; γ — угол между направлениями θ, φ и θ', φ' ; $x(\gamma)$ — индикатриса рассеяния, а σ — коэффициент рассеяния.

Введя обозначения

$$B = \frac{\eta}{\alpha}; \quad \lambda = \frac{\sigma}{\alpha}, \quad (2)$$

где α — коэффициент ослабления, переписываем (1) в виде:

$$B(\tau, \theta, \varphi) = \frac{\lambda}{4\pi} \int x(\gamma) I(\theta', \varphi') d\omega'. \quad (3)$$

Кроме этого уравнения, называемого в астрофизике уравнением лучевого равновесия, мы имеем еще уравнение переноса

$$\cos \theta \frac{dI}{d\tau} = I - B. \quad (4)$$

Уравнения (3) и (4) определяют искомые функции B и I . Решив уравнение (4) относительно I и приняв во внимание предельные условия, мы находим выражение интенсивности I через функцию B . Подставляя это выражение для I в уравнение (3), приходим к интегральному уравнению лучевого равновесия.

Остановимся сначала на случае сферической индикатрисы рассеяния, когда $x(\gamma) = 1$. Тогда это интегральное уравнение лучевого равновесия для двусторонней бесконечности принимает вид:

$$B(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} Ei(\tau - t) B(t) dt, \quad (5)$$

где

$$Eiu = \int_1^{\infty} e^{-xu} \frac{dx}{x}. \quad (6)$$

Точное решение этого уравнения, при котором поток излучения идет в область положительных τ , имеет вид:

$$B(\tau) = Ce^{-k\tau}, \quad (7)$$

где величина k связана с λ соотношением

$$\lambda = \frac{2k}{1\pi \frac{1+k}{1-k}}. \quad (8)$$

Если k мало, т. е. λ близко к единице, то правую часть уравнения (8) можно разложить в ряд по степеням k , и мы имеем:

$$\lambda = 1 - \frac{k^2}{3}. \quad (8a)$$

Эти два члена дают приближенную связь λ и k , получающуюся в приближении Эддингтона.

Полученное решение (7) справедливо в случае двусторонней бесконечности. Следовательно, в реальных условиях оно применимо только к глубоким слоям. Для того же, чтобы получить решение нашей реальной задачи, пригодное везде, нужно решить уравнение

$$B(\tau) = f(\tau) + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} E_i(\tau - t) B(t) dt, \quad (9)$$

где $f(\tau)$ — член, учитывающий прямое излучение, достигающее оптической глубины τ . В случае, если внешним источником является Солнце, находящееся на зенитном расстоянии θ_0 , имеем:

$$f(\tau) = \frac{\lambda}{4} S e^{-\tau \sec \theta_0}, \quad (10)$$

где πS — поток энергии, падающий вне среды на 1 см^2 поверхности, перпендикулярной к лучам Солнца.

Выражение (7) уже не удовлетворяет точно уравнению (9). Но оно удовлетворяет уравнению (9) приближенно на больших глубинах, если C подобрать соответствующим образом. Мы выберем постоянную C так, чтобы уравнение (9) удовлетворялось в „среднем“, т. е. чтобы интегралы от 0 до ∞ от обеих частей (9) были точно равны друг другу. Оказывается, что для этого C должно иметь значение

$$C = - \frac{k [\ln(1+k) - \ln(1-k)]}{k + \ln(1-k)} \int_0^{\infty} f(\tau) d\tau. \quad (11)$$

Приняв такое значение C , мы можем подставить (7) в правую часть (9) и получить новое приближение для $B(\tau)$; полученное новое выражение для $B(\tau)$ снова подставить в правую часть (9) и т. д. Иными словами, исходя из (7), как из первого приближения, мы можем искать следующие приближения. Преимущество этого метода заключается в том, что уже исходное приближение является довольно хорошим на больших оптических глубинах.

В случае *асферической* индикатрисы рассеяния условие лучевого равновесия имеет вид:

$$B(\tau, \theta, \varphi) = \frac{\lambda}{4\pi} \int x(\cos \gamma) I(\theta', \varphi') d\omega', \quad (12)$$

где

$$\cos \gamma = \cos \theta \cdot \cos \theta' + \sin \theta \cdot \sin \theta' \cdot \cos(\varphi - \varphi').$$

Чтобы перейти от этого уравнения к интегральному уравнению, содержащему только одну неизвестную функцию B , нужно опять ре-

шить уравнение переноса, найдя выражение I через B , и подставить в (12). Как показывает специальное исследование, в однородной задаче двусторонней бесконечности нет положительных решений, зависящих от азимута φ . Поэтому функции B и I могут быть приняты зависящими только от τ и θ .

Далее, мы можем ввести некоторую новую вспомогательную функцию $p(\theta, \theta')$, играющую в нашем исследовании весьма важную роль и определяемую равенством

$$p(\theta, \theta') = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} x(\cos \gamma) d\varphi. \quad (13)$$

Физический смысл функции $p(\theta, \theta')$ заключается в том, что если на элемент объема падает излучение под углом θ к нормали, то из этого излучения доля $p(\theta, \theta') \sin \theta' d\theta'$ рассеивается в поясе, заключенном между альмукантаратами θ' и $\theta' + d\theta'$.

Функция $p(\theta, \theta')$ обладает одним весьма важным и интересным свойством. Оно заключается в следующем. Разложим индикатрису рассеяния $x(\cos \gamma)$ в ряд по полиномам Лежандра

$$x(\cos \gamma) = \sum_i x_i p_i(\cos \gamma), \quad (14)$$

где x_i — коэффициенты разложения. Тогда $p(\theta, \theta')$ представляется в виде ряда

$$p(\theta, \theta') = \sum_i x_i p_i(\cos \theta) p_i(\cos \theta'). \quad (15)$$

С помощью введенной нами функции $p(\theta, \theta')$ интегральное уравнение лучевого равновесия может быть написано в виде:

$$B(\tau, \theta) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(\theta, \theta') \operatorname{tg} \theta' d\theta' \int_{\tau}^{\infty} e^{-(t-\tau) \sec \theta'} B(t, \theta') dt + \\ + \frac{\lambda}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} p(\theta, \theta') (\operatorname{tg} \theta') d\theta' \int_0^{\tau} e^{-(t-\tau) \sec \theta'} B(t, \theta') dt. \quad (16)$$

Решение этого уравнения ищем в форме:

$$B(\tau, \theta) = b(\theta) e^{-k\tau}. \quad (17)$$

Оказывается, что (16) удовлетворится, если $b(\theta)$ удовлетворяет, в свою очередь, простому интегральному уравнению

$$b(\theta) = \frac{\lambda}{2} \int_0^\pi \frac{p(\theta, \theta') b(\theta') \sin \theta' d\theta'}{1 + k \cos \theta'}. \quad (18)$$

При данном λ мы должны искать то значение k , при котором уравнение (18) имеет отличное от нуля положительное решение. На практике приходится делать обратное и при данном k искать значение λ и, затабулировав $\lambda(k)$, переворачивать эту таблицу.

Заметим, что форму индикатрисы рассеяния всегда приходится брать из опыта. Ввиду этого при определенной точности опытных данных имеет смысл в разложении (14) ограничиться только конечным числом членов. Поэтому и в (15) входит лишь конечное число членов суммы, вследствие чего уравнение (18) является уравнением с вырожденным ядром и всегда может быть решено в конечном виде. В результате $b(\theta)$ представляется в виде суммы полиномов Лежандра. Из выражения $b(\theta)$ посредством формулы

$$I(\theta) = \frac{b(\theta)}{1 + k \cos \theta} e^{-kz} \quad (19)$$

получаем значения интенсивности излучения в различных направлениях. Мы видим, что относительное распределение интенсивности по направлениям одинаково на всех глубинах.

Надо, однако, иметь в виду, что формулы (17), (18) и (19) представляют собой решение задачи для двусторонней бесконечности. Поэтому в реальной задаче эти решения будут удовлетворительными только на больших оптических глубинах.

Мы можем лишь утверждать, что на больших оптических глубинах относительное распределение интенсивности по направлениям θ уже не меняется с глубиной.

Далее, необходимо помнить, что I не зависит от θ только на больших оптических глубинах. Во внешних же слоях асимметричное расположение по азимутам внешних источников света может вызвать и зависимость диффузного излучения от азимута.

Наконец, то обстоятельство, что интенсивность, согласно (19), меняется с оптической глубиной экспоненциально, может быть для удобства истолковано так, что для диффузного излучения существует какой-то свой коэффициент ослабления, который в k раз отличается от коэффициента ослабления прямого света.

Практически бывает необходимо при заданной форме индикатрисы рассеяния и при заданном значении λ найти $I(\theta)$ и k .

С этой целью нами была выполнена некоторая вычислительная работа. Как указывалось выше, при каждой данной индикатрисе приходится табулировать λ как функцию k . При этом нами было обращено главное внимание на „вытянутые“ индикатрисы рассеяния типа

$$x(\cos \gamma) = C(1 + x_1 \cos \gamma)^n, \quad (20)$$

когда луч, падающий на элемент объема, рассеивается преимущественно в направлениях, близких к направлению падения. В формуле (20) x есть постоянный параметр.

Таблица 1

Индикатриса рассеяния $1 + x \cos \theta$
Значения λ для различных значений k и x

$k \backslash x$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
0,0	0,986	0,969	0,943	0,910	0,865	0,866	0,728	0,612	0,518
0,2	0,985	0,967	0,940	0,903	0,856	0,792	0,711	0,588	0,492
0,4	0,984	0,964	0,936	0,897	0,846	0,779	0,693	0,563	0,466
0,6	0,982	0,962	0,930	0,888	0,834	0,763	0,672	0,540	0,439
0,8	0,980	0,959	0,924	0,878	0,822	0,747	0,651	0,516	0,415
1,0	0,979	0,956	0,917	0,868	0,808	0,729	0,630	0,492	0,392

В табл. 1 приведены значения λ для различных значений k при индикатрисе типа $x(\gamma) = 1 + x_1 \cos \gamma$. Таблица составлена для шести различных значений x_1 . При $x_1 = 0$ мы имеем сферическую индикатрису рассеяния. При индикатрисе рассматриваемого типа решение уравнения (18) имеет вид:

$$b(\theta) = b_0 + b_1 \cos \theta,$$

где одна из постоянных может быть задана произвольно. Отношение b_1/b_0 приводится для различных k и x_1 в табл. 2.

Таблица 2

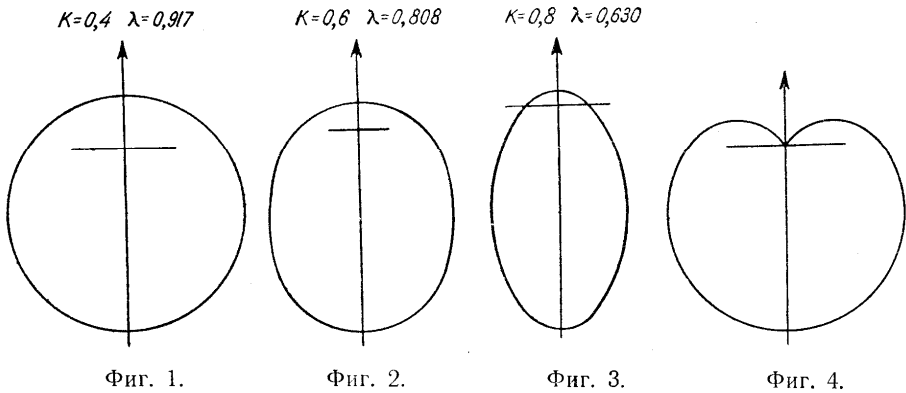
Индикатриса рассеяния $1 + x \cos \theta$
Отношение коэффициентов b_1/b_0 для различных значений k и x

$k \backslash x$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,2	-0,015	-0,019	-0,020	-0,046	-0,050	-0,062	-0,071	-0,093	-0,102
0,4	-0,029	-0,056	-0,060	-0,082	-0,100	-0,126	-0,148	-0,202	-0,218
0,6	-0,058	-0,084	-0,107	-0,143	-0,169	-0,208	-0,247	-0,306	-0,354
0,8	-0,088	-0,103	-0,146	-0,204	-0,234	-0,290	-0,350	-0,445	-0,487
1,0	-0,102	-0,131	-0,207	-0,265	-0,311	-0,384	-0,461	-0,569	-0,633

Таблица 3

Индикатриса рассеяния $1 + x \cos \theta$
 Отношение $\frac{I(0)}{I(\pi)}$ для различных значений k и x

$k \backslash x$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
0,0	0,667	0,538	0,431	0,333	0,250	0,176	0,111	0,053	0,026
0,2	0,647	0,518	0,414	0,304	0,226	0,155	0,096	0,044	0,021
0,4	0,629	0,481	0,383	0,283	0,212	0,136	0,082	0,035	0,017
0,6	0,593	0,454	0,347	0,249	0,187	0,116	0,067	0,028	0,012
0,8	0,558	0,437	0,321	0,221	0,165	0,098	0,053	0,020	0,0069
1,0	0,542	0,413	0,284	0,194	0,130	0,080	0,041	0,015	0,0057



Фиг. 1.

Фиг. 2.

Фиг. 3.

Фиг. 4.

В табл. 3 для той же индикатрисы рассеяния $1 + x_1 \cos \gamma$ и при тех же значениях k и x_1 даны значения $I(0)/I(\pi)$, т. е. отношения интенсивностей излучений, идущих вертикально вверх и вниз. Эти значения характеризуют в некоторой степени способность среды к рассеянному отражению.

Для иллюстрации на фиг. 1, 2, 3 приводятся полярные диаграммы зависимости интенсивности излучения от направления, т. е. $I(\theta)$, в частном случае, когда $x=1$; другими словами, при индикатрисе вида

$$x(\gamma) = 1 + \cos \gamma$$

и при различных значениях k . Сама эта индикатриса изображена на фиг. 4.

В табл. 4 приводятся значения λ , $\frac{I(0)}{I(\pi)}$ и коэффициентов $\frac{b_2}{b_0}$ и $\frac{b_1}{b_0}$ в решении

$$b(\theta) = b_0 + b_1 \cos \theta + b_2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$$

уравнения (18), при индикатрисе рассеяния $x(\gamma) = \frac{3}{4} (1 + \cos \gamma)^2$ и при различных значениях k .

Таблица 4

Вытянутая индикатриса рассеяния

$$x(\gamma) = \frac{3}{4} (1 + \cos \gamma)^2$$

Значения λ и $\frac{I(0)}{I(\pi)}$ при различных k

k	λ	b_1/b_0	b_2/b_0	$I(0)/I(\pi)$	k	λ	b_1/b_0	b_2/b_0	$I(0)/I(\pi)$
0,1	0,993	-0,100	0,000	0,669	0,6	0,761	-0,597	0,059	0,070
0,2	0,973	-0,200	0,009	0,444	0,7	0,672	-0,702	0,083	0,036
0,3	0,941	-0,295	0,013	0,294	0,8	0,562	-0,821	0,119	0,017
0,4	0,893	-0,402	0,028	0,189	0,9	0,420	-0,967	0,175	0,0051
0,5	0,835	-0,496	0,040	0,118					

Для индикатрисы $x(\gamma) = C(1 + \cos \gamma)^3$ значения λ при трех различных значениях k приводятся в табл. 5.

Таблица 5
Индикатриса
рассеяния
 $x(\gamma) = C(1 + \cos \gamma)^3$

k	λ
0,7	0,630
0,8	0,517
0,9	0,374

Нами вычислены такие же таблицы и для других индикатрис рассеяния, например для релеевской. Надо, однако, иметь в виду, что в морской воде индикатриса рассеяния не симметрична, а очень вытянута, и если пользоваться формулой (20), то показатель n будет иметь довольно большое значение. Между тем, когда n возрастает, число членов в разложениях (14) и (15) растет, и решение уравнения (18) становится практически все труднее и труднее.

К ВОПРОСУ О ДИФфуЗНОМ ОТРАЖЕНИИ СВЕТА МУТНОЙ СРЕДОЙ*

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 6.I 1943)

Вопрос о диффузном отражении света мутной средой, т. е. средой, производящей рассеяние и поглощение света, служил предметом многочисленных исследований. Для решения этой физической задачи до сих пор всегда применялся один и тот же метод, заключающийся в анализе светового режима внутри мутной среды и в последующем вычислении, на основании полученных таким путем данных, интенсивностей выходящего из среды, т. е. диффузно-отраженного, излучения. К сожалению, этот метод до сих пор не дал полного решения рассматриваемой задачи.

В настоящей заметке мы дадим другой метод решения вопроса о диффузном отражении света. Оказывается, что новый метод гораздо более эффективен, чем старый, приводивший к линейному интегральному уравнению. Новый метод не прибегает к вычислению величин, характеризующих световой режим внутри среды, и позволяет ограничиться анализом условий на ее границе.

Пусть среда состоит из плоскопараллельных слоев и каждый элемент ее обладает рассеивающей и поглощающей способностью. Отношение коэффициента рассеяния к коэффициенту поглощения мы обозначим через $\frac{\lambda}{1-\lambda}$ и будем считать величиной постоянной во всей среде. Пусть, далее, индикатриса рассеяния элемента объема имеет сферическую форму. Иными словами, излучение, рассеиваемое данным элементом объема, рассеивается равномерно по всем направлениям.

Наконец, примем пока, что среда ограничена с одной стороны некоторой плоскостью A , а с другой — уходит в бесконечность, и оп-

* ДАН СССР. 38, № 8, 257, 1943.

тическая толщина ее бесконечно велика. В конце заметки мы остановимся на случае среды конечной оптической толщины.

Пусть на границу A падают параллельные лучи. Обозначим через ξ косинус угла между направлением падающих лучей и внутренней нормалью к слоям. Пусть поток этого излучения, проходящий через единичную площадку, перпендикулярную к его направлению, в единицу времени равен πS . В результате рассеяний, вообще говоря многократных, свет будет выходить из среды в разных направлениях с некоторой интенсивностью I , зависящей от угла, образованного направлением выходящего луча с нормалью, косинус которого обозначим через η , а также от ξ .

Очевидно, что функция $I(\eta, \xi)$ будет пропорциональна S :

$$I(\eta, \xi) = r(\eta, \xi) S.$$

Функцию $r(\eta, \xi)$, характеризующую отражение света, мы и будем искать.

Заметим, что если к границе A среды бесконечной оптической толщины присоединить дополнительно слой малой оптической толщины $\Delta\tau$, состоящий из материи, обладающей теми же оптическими свойствами, то новая суммарная среда будет обладать диффузным отражением, характеризующимся той же функцией $r(\eta, \xi)$. Это свойство инвариантности по отношению к прибавлению дополнительного слоя мы и используем для вывода уравнения, которому должна удовлетворять искомая функция $r(\eta, \xi)$. В дальнейших расчетах мы будем принимать $\Delta\tau$ столь малым, что квадратом его можно пренебрегать.

В результате прибавления слоя $\Delta\tau$ мы будем иметь новую границу A' среды. На прежнюю границу A теперь уже будет падать ослабленный поток прямых лучей, т. е. не πS , а $\pi S \left(1 - \frac{\Delta\tau}{\xi}\right)$. В соответствии с этим, из этого потока будет отражаться от границы A излучение с интенсивностью $r(\eta, \xi) S \left(1 - \frac{\Delta\tau}{\xi}\right)$. Но при выходе этого излучения через слой $\Delta\tau$ произойдет его ослабление в $1 - \frac{\Delta\tau}{\eta}$ раз. Таким образом, из падающего на границу A прямого излучения отражается наружу только излучение с интенсивностью

$$r(\eta, \xi) \left(1 - \frac{\Delta\tau}{\xi}\right) \left(1 - \frac{\Delta\tau}{\eta}\right) S.$$

С другой стороны, введение слоя $\Delta\tau$ приводит к появлению дополнительного излучения в направлении η . Оно состоит из четырех частей:

1) Слой $\Delta\tau$ рассеивает часть проходящих через него прямых лучей, направляя их также и в направлении η . Полученное приращение интенсивности равно

$$\frac{\lambda}{4} \frac{\Delta\tau}{\eta} S.$$

2) Часть рассеянных слоем $\Delta\tau$ прямых лучей направляется в сторону границы A и от нее частично отражается. Соответствующее приращение интенсивности равно

$$\frac{\lambda}{2} \Delta\tau S \int_0^1 r(\eta, \zeta) \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

3) Слой $\Delta\tau$ рассеивает отраженное излучение, идущее от поверхности A . Соответствующее приращение интенсивности равно

$$\frac{\lambda}{2} \frac{\Delta\tau}{\eta} S \int_0^1 r(\zeta, \xi) d\zeta.$$

4) Часть излучения, отраженного от поверхности A , рассеивается слоем $\Delta\tau$ обратно и снова отражается частично поверхностью K . В результате интенсивность получит приращение

$$\lambda\Delta\tau S \int_0^1 r(\zeta, \xi) d\zeta \int_0^1 r(\eta, \zeta') \frac{d\zeta'}{\zeta'}.$$

Теперь напишем условие, выражающее тот факт, что в результате всех приращений и убылей, выходящая с поверхности A' интенсивность остается равной $r(\eta, \xi) S$

$$\begin{aligned} r(\eta, \xi) = & r(\eta, \xi) \left(1 - \frac{\Delta\tau}{\xi} - \frac{\Delta\tau}{\eta}\right) + \frac{\lambda}{4} \frac{\Delta\tau}{\eta} + \frac{\lambda}{2} \frac{\Delta\tau}{\eta} \int_0^1 r(\zeta, \xi) d\zeta + \\ & + \frac{\lambda}{2} \Delta\tau \int_0^1 r(\eta, \zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} + \lambda\Delta\tau \int_0^1 r(\zeta, \xi) d\zeta \int_0^1 r(\eta, \zeta') \frac{d\zeta'}{\zeta'} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\xi}\right) r(\eta, \xi) = & \frac{\lambda}{4} \left\{ \frac{1}{\eta} + 2 \int_0^1 r(\eta, \zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{2}{\eta} \int_0^1 r(\zeta, \xi) d\zeta + \right. \\ & \left. + 4 \int_0^1 r(\eta, \zeta') \frac{d\zeta'}{\zeta'} \int_0^1 r(\zeta, \xi) d\zeta \right\}. \end{aligned}$$

Введем функцию $R(\eta, \xi)$, определенную через

$$r(\eta, \xi) = \frac{\lambda}{4\eta} R(\eta, \xi). \quad (1)$$

Тогда для $R(\eta, \xi)$ имеем функциональное уравнение

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\xi}\right) R(\eta, \xi) = 1 + \frac{\lambda}{2} \int_0^1 R(\eta, \zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} + \\ + \frac{\lambda}{2} \int_0^1 R(\zeta, \xi) \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{\lambda^2}{4} \int_0^1 R(\eta, \zeta') \frac{d\zeta'}{\zeta'} \int_0^1 R(\zeta, \xi) \frac{d\zeta}{\zeta}. \end{aligned} \quad (2)$$

Очевидно, что если этому уравнению удовлетворяет функция $R(\eta, \xi)$, то ему же должна удовлетворять функция $R(\xi, \eta)$. Так как наша физическая задача должна иметь только одно решение, то возникает мысль искать решение уравнения (2) в виде симметричной функции

$$R(\eta, \xi) = R(\xi, \eta). \quad (3)$$

Но при этом условии правая часть (2) оказывается произведением двух одинаковых функций

$$\left(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\xi}\right) R(\eta, \xi) = \left\{ 1 + \frac{\lambda}{2} \int_0^1 R(\eta, \zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} \right\} \left\{ 1 + \frac{\lambda}{2} \int_0^1 R(\xi, \zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} \right\}. \quad (4)$$

Обозначим

$$\varphi(\eta) = 1 + \frac{\lambda}{2} \int_0^1 R(\eta, \zeta) \frac{d\zeta}{\zeta}. \quad (5)$$

Тогда (4) и (5) сразу дают структуру функций $R(\eta, \xi)$ и $r(\eta, \xi)$:

$$R(\eta, \xi) = \frac{\varphi(\eta)\varphi(\xi)}{\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\xi}}; \quad r(\eta, \xi) = \frac{\lambda}{4} \xi \frac{\varphi(\eta)\varphi(\xi)}{\eta + \xi}. \quad (6)$$

Подстановка (6) в (5) дает уравнение для функции $\varphi(\eta)$

$$\varphi(\eta) = 1 + \frac{\lambda}{2} \eta \varphi(\eta) \int_0^1 \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\eta + \xi}. \quad (7)$$

Итак, мы приходим к выводу: функция $r(\eta, \xi)$, характеризующая отражательную способность, имеет структуру, выражаемую формулой (6). Функция $\varphi(\eta)$ определяется при этом функциональным уравнением (7).

Поскольку в рассматриваемой физической задаче всегда $\lambda \ll 1$, уравнение (7) может быть легко решено численно, методом последовательных приближений. Тем самым рассматриваемая задача о диффузном отражении от бесконечно толстого слоя решается до конца.

Спрашивается, можно ли выведенные в настоящей работе функциональные уравнения (2) и (7) получить не из приведенных физических соображений, а чисто формально, из обычного интегрального уравнения теории рассеяния. В статье автора, печатающейся в другом месте, дан такой формальный вывод. Там же приведены результаты численного решения уравнения (7) с тремя знаками*.

Все сказанное выше относилось к диффузному отражению света средой бесконечной оптической глубины. Однако изложенный метод может быть обобщен на среду конечной оптической глубины τ , т. е. на слой, ограниченный с двух сторон граничными плоскостями A и B . При этом наряду с функцией $r(\eta, \xi)$, характеризующей диффузное отражение, ищется и функция $s(\eta, \xi)$, характеризующая диффузное пропускание и дающая интенсивность света, исходящего с поверхности B в направлении η , когда на поверхность A падает прямое излучение в направлении ξ .

В этом случае для получения решения используется инвариантность искомых функций $r(\eta, \xi)$ и $s(\eta, \xi)$ по отношению к такому преобразованию, когда у границы A прибавляется слой $\Delta\tau$ и одновременно у границы B отнимается слой такой же оптической толщины $\Delta\tau$.

Оказывается, что в этом случае искомые функции выражаются через две вспомогательные функции $\varphi(\eta)$ и $\psi(\eta)$, каждая из которых зависит лишь от одной переменной:

$$\left. \begin{aligned} r(\eta, \xi) &= \frac{\lambda}{4} \xi \frac{\varphi(\eta)\varphi(\xi) - \psi(\eta)\psi(\xi)}{\eta + \xi} \\ s(\eta, \xi) &= \frac{\lambda}{4} \xi \frac{\psi(\eta)\varphi(\xi) - \varphi(\eta)\psi(\xi)}{\eta - \xi} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Вспомогательные функции $\varphi(\eta)$ и $\psi(\eta)$ определяются из системы двух функциональных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\eta) &= 1 + \frac{\lambda}{2} \eta \varphi(\eta) \int_0^1 \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\eta + \xi} - \frac{\lambda}{2} \eta \psi(\eta) \int_0^1 \frac{\psi(\xi) d\xi}{\eta + \xi} \\ \psi(\eta) &= e^{-\frac{\tau}{\eta}} + \frac{\lambda}{2} \eta \int_0^1 \frac{\psi(\eta)\varphi(\xi) - \varphi(\eta)\psi(\xi)}{\eta - \xi} d\xi \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

* См. статью „О рассеянии света атмосферами планет“ (стр. 206). *Ред.*

Численное решение этой системы может быть получено также методом последовательных приближений.

Филиал Ленинградского
государственного университета

Поступило
9.XII 1942

Примечание. В этой статье впервые введен в теорию рассеяния света метод сложения слоев. В настоящее время этот метод (и связанные с ним различные „принципы инвариантности“) широко применяются как в теории рассеяния света, так и в ряде других разделов математической физики. Большого развития достиг указанный метод в многочисленных работах Чандрасекара и в его книге „Radiative Transfer“, Oxford, 1950 (русский перевод: „Перенос лучистой энергии“, Москва, 1953).

В частности, через пять лет после опубликования настоящей статьи, в 1947 году, Чандрасекар получил уравнения (9) для функций $\varphi(\tau)$ и $\psi(\tau)$ (обозначенных им через $X(\mu)$ и $Y(\mu)$). В иностранной литературе функции $X(\mu)$ и $Y(\mu)$ часто называются функциями Чандрасекара, хотя сам Чандрасекар и ссылается на настоящую статью В. А. Амбарцумяна.

К ЗАДАЧЕ О ДИФFUЗНОМ ОТРАЖЕНИИ СВЕТА

Рассмотрена задача о диффузном отражении света рассеивающей средой, состоящей из плоскопараллельных слоев. При этом строго учитываются многократные рассеяния. Индикатриса рассеяния (диаграмма углового распределения рассеянных лучей при элементарном акте рассеяния) принимается произвольной.

Задача о диффузном отражении света средой, каждый элементарный объем которой производит поглощение и рассеяние (мутная среда), служила предметом многочисленных исследований. Однако до сих пор, даже в простейшем случае среды, состоящей из плоскопараллельных слоев и параллельного пучка падающих на границу среды лучей, не было найдено решение. В настоящей работе будет показано, что в этом случае задача решается довольно простыми методами.

Пусть среда, состоящая из плоскопараллельных слоев, ограничена с одной стороны некоторой плоскостью A , а с другой простирается в бесконечность. На плоскость A падает параллельный пучок, который далее проникает в глубь среды, испытывая поглощение и рассеивания. Обозначим угол, образованный направлением лучей с внутренней нормалью, через θ_0 . Пусть далее направление падающих лучей имеет азимут φ_0 , отсчитанный от некоторого заранее заданного направления на плоскости A .

Обычный метод изучения задачи заключался в том, что рассматривалось уравнение переноса:

$$\cos \theta \frac{\partial I(\tau, \theta, \varphi)}{\partial \tau} = I(\tau, \theta, \varphi) - B(\tau, \theta, \varphi), \quad (1)$$

и обобщенное условие лучевого равновесия:

$$B(\tau, \theta, \varphi) = \frac{\lambda}{4\pi} \iint x(\cos \gamma) I(\tau, \theta', \varphi') d\omega' + \frac{\lambda}{4} S e^{-\tau \sec \theta_0} x(\cos \gamma_{II}), \quad (2)$$

* ЖЭТФ, 13. вып. 9—10, 224, 1943.

выражающее тот факт, что излучение единицы объема складывается из энергий, рассеянных этой единицей объема от лучей, идущих в разных направлениях через него, и энергии, рассеянной той же единицей объема от первоначального пучка, ослабленного по пути $e^{-\tau \sec \theta_0}$ раз. В этих уравнениях $I(\tau, \theta, \varphi)$ есть интенсивность диффузного излучения на оптической глубине τ , образующего угол θ с внешней нормалью и имеющего азимут φ . Оптическая глубина τ определяется для обычной линейной глубины z , отсчитанной от границы A , через объемный коэффициент экстинкции света $\alpha(z)$ с помощью формулы

$$\tau = \int_0^z \alpha(z) dz.$$

$B(\tau, \theta, \varphi)$ означает отдачу, определяемую через коэффициент излучения $\eta(\tau, \theta, \varphi)$ на глубине τ , в направлении θ, φ и α :

$$B(\tau, \theta, \varphi) = \frac{\eta(\tau, \theta, \varphi)}{\alpha}.$$

λ —есть отношение коэффициента чистого рассеяния к сумме коэффициентов поглощения и чистого рассеяния. πS есть поток внешнего излучения, падающий на единичную площадку, перпендикулярную к нему. Наконец, $x(\cos \gamma)$ есть функция, называемая индикатрисой рассеяния, которая дает относительное распределение излучения, рассеянного элементом объема из направления θ, φ по направлениям θ', φ' в зависимости от угла рассеяния γ между этими направлениями, определяемого формулой

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi'). \quad (3)$$

Мы будем также вместо $x(\cos \gamma)$ писать:

$$x(\theta, \varphi; \theta', \varphi') = x(\cos \gamma).$$

Что касается угла γ_1 между направлением θ, φ и направлением внешнего излучения, то

$$\cos \gamma_1 = -\cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0).$$

Обычно уравнения (1) и (2) решаются приближенно, посредством более или менее грубых усреднений по углам, или же система (1) и (2) решается посредством приведения к одному интегральному уравнению для неизвестной функции $B(\tau, \theta, \varphi)$. Из этой функции $B(\tau, \theta, \varphi)$ уже посредством интегрирования получается интенсивность выходящего из среды излучения. Мы же приведем задачу к некоторому функциональному уравнению, которое в дальнейшем и разрешим.

Вывод функционального уравнения. Заметим, что величины I и B , входящие в (1), зависят не только от аргументов θ и φ , но также от аргументов θ_0, φ_0 , как от параметров, характеризующих направление внешнего излучения. В частности, значение I при $\tau=0$, т. е. интенсивность выходящего с границы диффузного излучения $I(0, \theta, \varphi)$, которое мы будем называть диффузно-отраженным излучением, будет также зависеть от θ_0, φ_0 как от параметров. Интенсивность этого излучения обозначим теперь через

$$I(0, \theta, \varphi) = r(\theta, \varphi; \theta_0, \varphi_0) S.$$

Поскольку линейность задачи обуславливает пропорциональность интенсивности падающему потоку πS , функция $r(\theta, \varphi; \theta_0, \varphi_0)$ и характеризует диффузную отражательную способность нашей среды. Если на среду падает не пучок параллельных лучей, а излучение, идущее из разных направлений θ_0, φ_0 , где θ_0 по-прежнему угол излучения с внутренней нормалью, то интенсивность диффузно-отраженного света $I_2(\theta, \varphi)$ будет равна:

$$I_2(\theta, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r(\theta, \varphi; \theta_0, \varphi_0) I_1(\theta_0, \varphi_0) \sin \theta_0 d\theta_0 d\varphi_0. \quad (4)$$

Функцию r мы и будем искать. Будем ее называть функцией отражения.

Вернемся к случаю параллельного пучка лучей и проведем плоскость A' на оптической глубине $d\tau$ от граничной плоскости A . На плоскости A' мы имеем два рода излучений, идущих внутрь: прямое πS , ослабленное до величины $\pi S (1 - d\tau \sec \theta_0)$, и диффузное от вышележащего слоя оптической толщины $d\tau$. Его интенсивность, как это непосредственно видно из уравнения переноса, равна:

$$- B(0, \theta, \varphi) \sec \theta d\tau,$$

где $\sec \theta < 0$ так, как для лучей, идущих вглубь, угол с внешней нормалью $\theta > \frac{\pi}{2}$. Если введем вместо θ угол с внутренней нормалью $\theta' = \pi - \theta$, то та же интенсивность выразится через

$$B(0, \pi - \theta', \varphi) \sec \theta' d\tau.$$

Та часть среды, которая лежит под A' , отражает диффузно оба эти излучения. При этом функция r , характеризующая отражение, будет та же самая, так как отнятие слоя $d\tau$ от среды бесконечной

оптической толщины, так же как вообще отнятие слоя любой оптической толщины, не может изменить диффузную отражательную способность среды. Эта инвариантность диффузно-отражательной способности по отношению к отнятию или прибавлению слоя конечной или бесконечно малой оптической толщины и является исходным пунктом для нашего метода.

Пользуясь определением функции r , мы найдем, что от A' должна отражаться в направлении θ, φ интенсивность

$$Sr(\theta, \varphi; \theta_0, \varphi_0) (1 - d\tau \sec \theta_0) + \\ + \frac{d\tau}{\pi} \int \int r(\theta, \varphi; \theta', \varphi') B(0, \pi - \theta', \varphi') \sec \theta' \sin \theta' d\theta' d\varphi'.$$

С другой стороны, на основании того же уравнения переноса можно прямо написать интенсивность излучения, идущего наружу от плоскости A' . В самом деле, при $\tau = 0$ интенсивность излучения, идущего наружу, равна $r(\theta, \varphi; \theta_0, \varphi_0) S$. Следовательно, согласно уравнению переноса, на глубине $d\tau$ она будет равна:

$$Sr(\theta, \varphi; \theta_0, \varphi_0) (1 + d\tau \sec \theta) - B(0, \theta, \varphi) \sec \theta d\tau.$$

Приравнявая эти два выражения для интенсивности лучей, идущих от плоскости A' наружу, получаем:

$$(\sec \theta + \sec \theta_0) r(\theta, \varphi; \theta_0, \varphi_0) S = \\ = B(0, \theta, \varphi) \sec \theta + \frac{1}{\pi} \int \int r(\theta, \varphi; \theta', \varphi') B(0, \pi - \theta', \varphi') \operatorname{tg} \theta' d\theta' d\varphi'. \quad (5)$$

С другой стороны, полагая в (2) $\tau = 0$, находим для $B(0, \theta, \varphi)$:

$$B(0, \theta, \varphi) = \frac{\lambda}{4} S x(\cos \gamma_{11}) + \frac{\lambda S}{4\pi} \int \int x(\cos \gamma_{11}) I(0, \theta', \varphi') \sin \theta' d\theta' d\varphi',$$

или, поскольку

$$I(0, \theta', \varphi') = Sr(\theta', \varphi'; \theta_0, \varphi_0),$$

имеем:

$$B(0, \theta, \varphi) = \frac{\lambda}{4} S x(\cos \gamma_{11}) + \frac{\lambda S}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\theta, \varphi; \theta', \varphi') r(\theta', \varphi'; \theta_0, \varphi_0) \sin \theta' d\theta' d\varphi'. \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5), находим:

$$(\sec \theta + \sec \theta_0) r(\theta, \varphi; \theta_0, \varphi_0) = \frac{\lambda}{4} x(\cos \gamma_{11}) \sec \theta +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\lambda}{4\pi} \sec \theta \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\theta, \varphi; \theta', \varphi') r(\theta', \varphi'; \theta_0, \varphi_0) \sin \theta' d\theta' d\varphi' + \\
& + \frac{\lambda}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r(\theta, \varphi; \theta', \varphi') x(\theta', \varphi'; \theta_0, \varphi_0) \operatorname{tg} \theta' d\theta' d\varphi' + \\
& + \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r(\theta, \varphi; \theta', \varphi') x(\pi - \theta', \varphi'; \theta'', \varphi'') r(\theta'', \varphi''; \theta_0, \varphi_0) \times \\
& \quad \times \operatorname{tg} \theta' \sin \theta'' d\theta' d\varphi' d\theta'' d\varphi''. \tag{7}
\end{aligned}$$

Это и есть основное функциональное уравнение, которому подчиняется функция $r(\theta, \varphi; \theta_0, \varphi_0)$, характеризующая диффузное отражение. Для сокращения письма удобнее считать аргументом функции r и x не θ , а $\eta = \cos \theta$. В соответствии с этим будем писать также: $\cos \theta' = \eta'$; $\cos \theta'' = \eta''$. Тогда наше функциональное уравнение переписется в виде:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta_0} \right) r(\eta, \varphi; \eta_0, \varphi_0) = \frac{\lambda}{4\eta} x(\eta, \varphi; -\eta_0, \varphi_0) + \\
& + \frac{\lambda}{4\pi\eta} \int_0^{2\pi} \int_0^1 x(\eta, \varphi; \eta', \varphi') r(\eta', \varphi'; \eta_0, \varphi_0) d\eta' d\varphi' + \\
& + \frac{\lambda}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r(\eta, \varphi; \eta', \varphi') x(\eta', \varphi'; \eta_0, \varphi_0) \frac{d\eta'}{\eta'} d\varphi' + \\
& + \frac{\lambda}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r(\eta, \varphi; \eta', \varphi') x(-\eta', \varphi'; \eta'', \varphi'') r(\eta'', \varphi''; \eta_0, \varphi_0) \frac{d\eta'}{\eta'} d\varphi' d\eta'' d\varphi''. \tag{8}
\end{aligned}$$

Это уравнение примет более симметричную форму, если мы подставим

$$r(\eta, \varphi; \eta_0, \varphi_0) = \frac{\lambda}{4\eta} R(\eta, \varphi; \eta_0, \varphi_0). \tag{9}$$

В самом деле, мы будем иметь:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta_0} \right) R(\eta, \varphi; \eta_0, \varphi_0) = x(\eta, \varphi; -\eta_0, \varphi_0) + \\
 & + \frac{\lambda}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 x(\eta, \varphi; \eta', \varphi') R(\eta', \varphi'; \eta_0, \varphi_0) \frac{d\eta'}{\eta'} d\varphi' + \\
 & + \frac{\lambda}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 R(\eta, \varphi; \eta', \varphi') x(\eta', \varphi'; \eta_0, \varphi_0) \frac{d\eta'}{\eta'} d\varphi' + \\
 & + \frac{\lambda^2}{16\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 R(\eta, \varphi; \eta', \varphi') x(-\eta', \varphi'; \eta'', \varphi'') R(\eta'', \varphi''; \eta_0, \varphi_0) \frac{d\eta'}{\eta'} d\varphi' \frac{d\eta''}{\eta''} d\varphi''.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Обратим внимание на следующее свойство этого уравнения: если ему удовлетворяет некоторая функция $R(\eta, \varphi; \eta_0, \varphi_0)$, то ему же должна удовлетворять функция $R(\eta_0, \varphi_0; \eta, \varphi)$ с переставленными аргументами. С другой стороны, поскольку решение нашей физической задачи единственное, то можно ожидать, что и уравнение (10) имеет единственное регулярное решение. Тогда мы вследствие приведенного свойства нашего уравнения должны заключить, что

$$R(\eta, \varphi; \eta_0, \varphi_0) = R(\eta_0, \varphi_0; \eta, \varphi), \tag{11}$$

т. е., что функция R симметричная. Это находится в полном соответствии с тем, что симметрия выражения

$$\eta r(\eta, \varphi; \eta_0, \varphi_0) = \frac{\lambda}{4} R(\eta, \varphi; \eta_0, \varphi_0)$$

следует непосредственно из физических соображений [1].

Представление индикатрисы через полиномы Лежандра. При эмпирическом определении индикатрисы рассеяния для заданной среды, а также при некоторых теоретических выводах (формула Релея) она представляется в виде конечной суммы полиномов Лежандра. В общем случае индикатриса может быть разложена в ряд по полиномам Лежандра. Если в представлении всего $n+1$ членов, то

$$x(\cos \gamma) = \sum_{i=0}^n x_i P_i(\cos \gamma). \tag{12}$$

Поскольку функция $x(\cos \gamma)$ дает относительное распределение рассеянного света по направлениям при элементарном акте рассеяния, она должна удовлетворять условию нормировки:

$$\frac{1}{4\pi} \iint x(\cos \gamma) d\omega = 1$$

или

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi x(\cos \gamma) \sin \gamma d\gamma = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} x(\gamma) d\gamma = 1. \quad (13)$$

Условие (13) дает для первого коэффициента в ряде (12) во всех случаях значения $x_0 = 1$.

В случае сферической индикатрисы рассеяния, мы имеем просто

$$x(\cos \gamma) = 1,$$

т. е. только один член разложения.

В случае релеевой индикатрисы рассеяния

$$x(\cos \gamma) = \frac{3}{4} (1 + \cos^2 \gamma) = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \gamma - \frac{1}{2} \right) = P_0(\cos \gamma) + \\ + \frac{1}{2} P_2(\cos \gamma).$$

Таким образом, в этом случае $x_0 = 1$ и $x_2 = \frac{1}{2}$, а все остальные коэффициенты равны нулю.

Представляет также значительный интерес группа вытянутых индикатрис рассеяния типа

$$x(\gamma) = 1 + x_1 \gamma,$$

где величина x_1 характеризует степень вытянутости индикатрисы в направлении падающего луча.

В дальнейшем мы воспользуемся разложением (12) для решения основного функционального уравнения (10), считая, что n может быть как конечным, так и бесконечным.

Решение основного функционального уравнения. Согласно известной формуле сложения шаровых функций,

$$P_i(\cos \gamma) = P_i(\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')) = P_i(\cos \theta) P_i(\cos \theta') + \\ + 2 \sum_{m=1}^i \frac{(i-m)!}{(i+m)!} P_i^m(\cos \theta) P_i^m(\cos \theta') \cos m(\varphi - \varphi').$$

Поэтому индикатрису рассеяния $x(\cos \gamma)$ можно представить в виде:

$$\begin{aligned} x(\cos \gamma) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=m}^{\infty} c_{im} P_i^m(\cos \theta) P_i^m(\cos \theta') \cos m(\varphi - \varphi') = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=m}^{\infty} c_{im} P_i^m(\eta) P_i^m(\eta') \cos m(\varphi - \varphi'), \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$c_{i0} = x_i \quad (14')$$

и

$$c_{im} = 2x_i \frac{(i-m)!}{(i+m)!}, \quad (14'')$$

или же в форме:

$$x(\cos \gamma) = \sum_{m=0}^{\infty} q_m(\eta, \eta') \cos m(\varphi - \varphi'), \quad (15)$$

где

$$q_m(\eta, \eta') = \sum_{i=m}^{\infty} c_{im} P_i^m(\eta) P_i^m(\eta') \quad (15')$$

являются симметричными функциями своих аргументов.

Обратим внимание на то обстоятельство, что функции отражения r , а следовательно, и R должны также зависеть только от разности азимутов $\varphi - \varphi_0$ падающего и отраженного света, так как они должны быть инвариантны по отношению к преобразованию начала отсчета аргументов:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} &= \varphi - a, \\ \bar{\varphi}_0 &= \varphi_0 - a. \end{aligned}$$

При этом R должна быть четной функцией $\varphi - \varphi_0$, так как она должна быть инвариантна по отношению к перемене направления отсчета азимутов. В силу этого в разложении Фурье функции R по аргументу $\varphi - \varphi_0$ должны отсутствовать синусы, и само разложение должно иметь вид:

$$R(\eta, \varphi; \eta_0, \varphi_0) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(\eta, \eta_0) \cos m(\varphi - \varphi_0). \quad (16)$$

Нашей задачей и должно быть нахождение функций $f_m(\eta, \eta_0)$, т. е. коэффициентов разложения Фурье функции R .

Подставим (16) и (15) в (10). Найдем:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta_0}\right) \sum_{m=0}^{\infty} f_m(\eta, \eta_0) \cos m(\varphi - \varphi_0) &= \sum_{m=0}^{\infty} q_m(\eta, -\eta_0) \cos m(\varphi - \varphi_0) + \\ &+ \frac{\lambda}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos m(\varphi - \varphi_0)}{2 - \delta_{0m}} \int_0^1 q_m(\eta, \eta') f_m(\eta', \eta_0) \frac{d\eta'}{\eta'} + \\ &+ \frac{\lambda}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos m(\varphi - \varphi_0)}{2 - \delta_{0m}} \int_0^1 q_m(\eta', \eta_0) f_m(\eta, \eta') \frac{d\eta'}{\eta'} + \\ &+ \frac{\lambda^2}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos m(\varphi - \varphi_0)}{(2 - \delta_{0m})^2} \int_0^1 \int_0^1 f_m(\eta, \eta') q_m(-\eta', \eta'') f_m(\eta'', \eta_0) \frac{d\eta'}{\eta'} \frac{d\eta''}{\eta''}, \end{aligned}$$

где множитель $2 - \delta_{0m}$ в знаменателе есть выражение, равное единице при $m=0$ и двум при $m > 0$.

Приравнявая коэффициенты при $\cos m(\varphi - \varphi_0)$ в обеих частях полученного равенства, находим:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta_0}\right) f_m(\eta, \eta_0) &= q_m(\eta, -\eta_0) + \frac{\lambda}{2(2 - \delta_{0m})} \int_0^1 q_m(\eta, \eta') f_m(\eta', \eta_0) \frac{d\eta'}{\eta'} + \\ &+ \frac{\lambda}{2(2 - \delta_{0m})} \int_0^1 q_m(\eta', \eta_0) f_m(\eta, \eta') \frac{d\eta'}{\eta'} + \\ &+ \frac{\lambda^2}{4(2 - \delta_{0m})^2} \int_0^1 \int_0^1 f_m(\eta, \eta') q_m(-\eta', \eta'') f_m(\eta'', \eta_0) \frac{d\eta'}{\eta'} \frac{d\eta''}{\eta''}. \quad (17) \end{aligned}$$

Таким образом, для нахождения каждого из коэффициентов Фурье $f_m(\eta, \eta')$ находим отдельное функциональное уравнение. Мы видим, что можно отыскивать каждую из функций $f_m(\eta, \eta')$ независимо от других.

Из формул (14) и (15) очевидно, что если разложение индикатрисы рассеяния по полиномам Лежандра содержит только конечное число членов, так что n есть порядок наивысшего члена разложения, то все $q_m(\eta, \eta_0)$ при $m > n$ равны нулю. Уравнения (17) показывают,

что тогда и f_m при $m > n$ равны нулю. Таким образом, в разложении Фурье (16) функции отражения число членов равно порядку наивысшего члена в разложении (12) индикатрисы рассеяния по полиномам Лежандра.

Теперь исследуем уравнения (17) для функций $f_m(\eta, \eta_0)$. Для этого подставим (15) в (17). Имеем:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta_0}\right) f_m(\eta, \eta_0) &= \sum_{i=m}^{\infty} (-1)^{i+m} c_{im} P_i^m(\eta) P_i^m(\eta_0) + \\ &+ \frac{\lambda}{2(2-\delta_{0m})} \sum_{i=m}^{\infty} c_{im} P_i^m(\eta) \int_0^1 P_i^m(\eta') f_m(\eta', \eta_0) \frac{d\eta'}{\eta'} + \\ &+ \frac{\lambda}{2(2-\delta_{0m})} \sum_{i=m}^{\infty} c_{im} P_i^m(\eta_0) \int_0^1 P_i^m(\eta') f_m(\eta, \eta') \frac{d\eta'}{\eta'} + \\ &+ \frac{\lambda^2}{4(2-\delta_{0m})^2} \sum_{i=m}^{\infty} (-1)^{i+m} c_{im} \int_0^1 P_i^m(\eta') f_m(\eta, \eta') \frac{d\eta'}{\eta'} \int_0^1 P_i^m(\eta'') f_m(\eta'', \eta_0) \frac{d\eta''}{\eta''}. \end{aligned}$$

Мы видим, что правая часть может быть представлена в виде суммы некоторых произведений:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta_0}\right) f_m(\eta, \eta_0) = \\ &= \sum_{i=m}^{\infty} (-1)^{i+m} c_{im} \left\{ P_i^m(\eta) + \frac{\lambda(-1)^{i+m}}{2(2-\delta_{0m})} \int_0^1 f_m(\eta, \eta') P_i^m(\eta') \frac{d\eta'}{\eta'} \right\} \times \\ &\times \left\{ P_i^m(\eta_0) + \frac{\lambda(-1)^{i+m}}{2(2-\delta_{0m})} \int_0^1 f(\eta', \eta_0) P_i^m(\eta') \frac{d\eta'}{\eta'} \right\}. \quad (18) \end{aligned}$$

В силу симметрии функций $f_m(\eta, \eta_0)$ два множителя в скобках, стоящие в каждом члене суммы в формуле (18), представляют собою одинаковые функции, одна от η , другая от η_0 . Иными словами, (18) можно переписать в виде:

$$\left(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta_0}\right) f_m(\eta, \eta_0) = \sum_{i=m}^{\infty} (-1)^{i+m} c_{im} \varphi_i^m(\eta) \varphi_i^m(\eta_0), \quad (19)$$

где

$$\varphi_i^m(\eta) = P_i^m(\eta) + \frac{\lambda(-1)^{i+m}}{2(2-\delta_{0m})} \int_0^1 f_m(\eta, \eta') P_i^m(\eta') \frac{d\eta'}{\eta'} \quad (20)$$

Из уравнения (19) следует, что функции $f_m(\eta, \eta_0)$ имеют структуру:

$$f_m(\eta, \eta_0) = \sum_{i=m}^{\infty} (-1)^{i+m} \frac{c_{im} \varphi_i^m(\eta) \varphi_i^m(\eta_0)}{\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta_0}} \quad (21)$$

Уравнения для вспомогательных функций $\varphi_i^m(\eta)$ получим, подставляя (21) в правую часть (20):

$$\varphi_i^m(\eta) = P_i^m(\eta) + \frac{\lambda(-1)^{m+i}}{2(2+\delta_{0m})} \int_0^1 \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-1)^{k+m} c_{km} \varphi_k^m(\eta) \varphi_k^m(\eta')}{\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta'}} P_i^m(\eta') \frac{d\eta'}{\eta'}$$

или

$$\varphi_i^m(\eta) = P_i^m(\eta) + \frac{\lambda}{2} \sum_{k=m}^{\infty} (-1)^{i+k} \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \eta \int_0^1 \frac{x_k \varphi_k^m(\eta) \varphi_k^m(\eta') P_i^m(\eta')}{\eta + \eta'} d\eta' \quad (22)$$

так как

$$c_{km} = (2 - \delta_{0m}) x_k \frac{(k-m)!}{(k+m)!}$$

Полагая $i = m, m+1, \dots$, мы получаем из (22) систему функциональных уравнений для неизвестных функций $\varphi_m^m(\eta), \varphi_{m+1}^m(\eta), \dots$. Число неизвестных функций равно при каждом m числу уравнений. Если наивысший порядок присутствующего в разложении (12) полинома Лежандра равен n , то число всех неизвестных функций равно $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, так же как и число функциональных уравнений. Одна-

ко вся совокупность уравнений распадается на ряд различных подсистем, соответствующих различным m . Подсистема для функций φ_i^m , где m фиксировано, может быть разрешена самостоятельно, независимо от других подсистем.

Таким образом, наше исследование определяет неизвестную функцию R от четырех переменных с помощью формул (16) и (21) через некоторую совокупность функций одного переменного φ_i^m , причем

сами эти вспомогательные функции определяются из системы функциональных уравнений (22).

Такое представление R особенно удобно в случае конечности разложения (12) индикатрисы рассеяния. Это будет видно на приведенных ниже частных примерах.

Сферическая индикатриса рассеяния. В этом случае

$$x(\cos \gamma) = 1, \quad (23)$$

и все x_i при $i > 0$ равны нулю. Наивысший порядок полинома в разложении индикатрисы рассеяния равен нулю. Поэтому в разложении (16) остается лишь один член, соответствующий $m = 0$,

$$R = f_0(\eta, \eta_0). \quad (24)$$

Формула (21) сводится в этом случае к

$$f_0(\eta, \eta_0) = R = \frac{\varphi_0^0(\eta) \varphi_0^0(\eta_0)}{\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta_0}}, \quad (25)$$

и единственная вспомогательная функция φ_0^0 должна быть определена из одного функционального уравнения

$$\varphi_0^0(\eta) = 1 + \frac{\lambda}{2} \eta \varphi_0^0(\eta) \int_0^1 \frac{\varphi_0^0(\eta') d\eta'}{\eta + \eta'}, \quad (26)$$

к которому сводится система (22). При каждом λ эта система легко решается численно методом последовательных приближений.

Случай сферической индикатрисы рассеяния нами рассмотрен специально в отдельной статье [2], где приведены также таблицы численных значений функции φ_0^0 для различных λ , полученные указанным методом.

Вытянутая индикатриса рассеяния. Рассмотрим индикатрису типа

$$x(\cos \gamma) = 1 + x_1 \cos \gamma. \quad (27)$$

Если $x_1 > 0$, то такая индикатриса вытянута в направлении $\gamma = 0$, в случае $x_1 < 0$ она вытянута в направлении $\gamma = \pi$.

В этом случае наивысший порядок полиномов Лежандра в разложении индикатрисы равен единице. Поэтому (16) сводится к

$$R(\eta, \varphi; \eta_0, \varphi_0) = f_0(\eta, \eta_0) + f_1(\eta, \eta_0) \cos(\varphi - \varphi_0). \quad (28)$$

Что касается f_0 и f_1 , то, согласно (21), они имеют следующую структуру:

$$f_0(\eta, \eta_0) = \frac{\varphi_0^0(\eta) \varphi_0^0(\eta_0) - x_1 \varphi_1^0(\eta) \varphi_1^0(\eta_0)}{\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta_0}}, \quad f_1(\eta, \eta_0) = x_1 \frac{\varphi_1^1(\eta) \varphi_1^1(\eta_0)}{\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta_0}} \quad (29)$$

При этом вспомогательные функции φ_0^0 и φ_1^0 определяются, согласно (22), из подсистемы

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0^0(\eta) &= 1 + \frac{\lambda}{2} \eta \varphi_0^0(\eta) \int_0^1 \frac{\varphi_0^0(\eta') d\eta'}{\eta + \eta'} - \frac{\lambda}{2} x_1 \eta \varphi_1^0(\eta) \int_0^1 \frac{\varphi_1^0(\eta') d\eta'}{\eta + \eta'} \\ \varphi_1^0(\eta) &= \eta - \frac{\lambda}{2} \eta \varphi_0^0(\eta) \int_0^1 \frac{\varphi_0^0(\eta') \eta' d\eta'}{\eta + \eta'} - + \frac{\lambda}{2} x_1 \eta \varphi_1^0(\eta) \int_0^1 \frac{\varphi_1^0(\eta') \eta' d\eta'}{\eta + \eta'} \end{aligned} \right\} (30)$$

а вспомогательная функция φ_1^1 из уравнения

$$\varphi_1^1(\eta) = \sqrt{1 - \eta^2} + \frac{\lambda}{4} x_1 \eta \varphi_1^1(\eta) \int_0^1 \frac{\varphi_1^1(\eta') d\eta'}{\eta + \eta'}. \quad (31)$$

Что касается последнего уравнения, то его можно численно решить последовательными приближениями. При этом удобно путем умножения на $\sqrt{1 - \eta^2}$ и замены $\varphi_1^1(\eta) \sqrt{1 - \eta^2} = \psi(\eta)$ привести его предварительно к виду:

$$\psi(\eta) = 1 - \eta^2 + \frac{\lambda x_1}{4} \eta \psi(\eta) \int_0^1 \frac{\psi(\eta') d\eta'}{\eta + \eta'}. \quad (32)$$

Система же (30) интересна тем, что между двумя функциями φ_0^0 и φ_1^0 существует некоторое простое соотношение. Для установления его преобразуем второе уравнение этой системы, заменяя

$$\frac{\eta'}{\eta + \eta'} = 1 - \frac{\eta}{\eta + \eta'}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \varphi_1^0(\eta) &= 1 - \frac{\lambda}{2} \eta \varphi_0^0(\eta) \int_0^1 \varphi_0^0(\eta') d\eta' + \frac{\lambda x_1}{2} \eta \varphi_1^0(\eta) \int_0^1 \varphi_1^0(\eta') d\eta' + \\ &+ \frac{\lambda}{2} \eta^2 \varphi_0^0(\eta) \int_0^1 \frac{\varphi_0^0(\eta') d\eta'}{\eta + \eta'} - \frac{\lambda x_1}{2} \eta^2 \varphi_1^0(\eta) \int_0^1 \frac{\varphi_1^0(\eta') d\eta'}{\eta + \eta'}. \end{aligned}$$

Последние два члена, на основании первого из уравнений системы (30), мы можем заменить через

$$\eta(\varphi_0^0(\eta) - 1).$$

Поэтому, если ввести постоянные

$$\alpha = \int_0^1 \varphi_0^0(\eta) d\eta, \quad \beta = \int_0^1 \varphi_1^0(\eta) d\eta, \quad (33)$$

то

$$\varphi_1^0(\eta) = \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{2} \alpha\right) \eta \varphi_0^0(\eta)}{1 - \frac{\lambda x_1}{2} \beta \eta}. \quad (34)$$

Таким образом, φ_1^0 выражается через φ_0^0 , но при этом входят две постоянные α и β , которые определяются по (33). Первое из уравнений (30) совместно с (34) и (33) целиком определяет функции φ_0^0 и φ_1^0 . Здесь также можно применить метод последовательных приближений. Численные значения функций φ_0^0 , φ_1^0 и φ_1^1 , полученные методом последовательных приближений, для различных λ и для $x_1 = 1$ приведены в табл. 1, 2, 3. Последовательные приближения повторялись до тех

Таблица 1

Значения вспомогательной функции $\varphi_0^0(\eta)$
Индикатриса рассеяния $x(\cos \gamma) = 1 + \cos \gamma$

$\lambda \backslash \eta$	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,1	1,054	1,070	1,088	1,109	1,134	1,166	1,248
0,2	1,080	1,106	1,136	1,171	1,215	1,276	1,450
0,3	1,097	1,130	1,168	1,216	1,276	1,365	1,642
0,4	1,108	1,146	1,192	1,249	1,324	1,439	1,829
0,5	1,115	1,157	1,208	1,274	1,362	1,502	2,013
0,6	1,119	1,163	1,219	1,291	1,391	1,535	2,194
0,7	1,120	1,167	1,226	1,304	1,414	1,599	2,375
0,8	1,120	1,167	1,230	1,312	1,431	1,637	2,552
0,9	1,118	1,166	1,230	1,317	1,443	1,669	2,730
1,0	1,115	1,164	1,228	1,318	1,452	1,696	2,909

пор, пока подстановка полученного численного решения в (30) и квадратуры, проведенные по формуле Симпсона, не давали левые части, равные с точностью до единицы третьего знака исходным. Поэтому точность полученных решений порядка единицы третьего знака.

При индикатрисе рассматриваемого типа особый интерес пред-

Таблица 2

Значения вспомогательной функции $\varphi_1^0(\eta)$
Индикатриса рассеяния $x(\cos \gamma) = 1 + \cos \gamma$

$\lambda \backslash \eta$	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,1	0,083	0,077	0,071	0,064	0,054	0,041	0,000
0,2	0,172	0,162	0,150	0,136	0,118	0,090	0,000
0,3	0,264	0,251	0,235	0,215	0,189	0,147	0,000
0,4	0,359	0,344	0,324	0,299	0,265	0,210	0,000
0,5	0,456	0,439	0,417	0,387	0,346	0,277	0,000
0,6	0,555	0,536	0,512	0,478	0,431	0,349	0,000
0,7	0,654	0,635	0,609	0,572	0,519	0,425	0,000
0,8	0,755	0,734	0,708	0,669	0,610	0,505	0,000
0,9	0,856	0,836	0,808	0,767	0,704	0,588	0,000
1,0	0,959	0,939	0,910	0,867	0,800	0,674	0,000

Таблица 3

Значения вспомогательной функции $\varphi_1^1(\eta)$
Индикатриса рассеяния $x(\cos \gamma) = 1 + \cos \gamma$

$\lambda \backslash \eta$	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,1	1,016	1,021	1,027	1,032	1,038	1,044	1,051
0,2	1,010	1,018	1,026	1,034	1,043	1,053	1,062
0,3	0,988	0,998	1,007	1,018	1,028	1,040	1,050
0,4	0,954	0,964	0,975	0,986	0,997	1,009	1,022
0,5	0,903	0,915	0,926	0,938	0,951	0,962	0,976
0,6	0,836	0,847	0,859	0,870	0,883	0,895	0,908
0,7	0,749	0,759	0,770	0,780	0,790	0,804	0,815
0,8	0,632	0,640	0,648	0,658	0,668	0,679	0,688
0,9	0,459	0,466	0,473	0,479	0,486	0,494	0,502
1,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

ставляет случай $\lambda = 1$ (т. е. случай чистого рассеяния, когда поглощение отсутствует) при произвольном x_1 . Оказывается, что в этом случае система (30) удовлетворится, если положить $\varphi_1^0 = 0$ и φ_0^0 равным решению (26) для сферической индикатрисы рассеяния.

В самом деле, положим в (30) $\lambda = 1$ и $\varphi_1^0 = 0$. Тогда наши два уравнения сводятся к следующим:

$$\varphi_0^0(\eta) = 1 + \frac{\lambda}{2} \eta \varphi_0^0(\eta) \int_0^1 \frac{\varphi_0^0(\eta') d\eta'}{\eta + \eta'}, \quad (35)$$

$$1 = \frac{1}{2} \varphi_0^0(\eta) \int_0^1 \frac{\varphi_0^0(\eta') \eta' d\eta'}{\eta + \eta'}. \quad (36)$$

Первое из этих уравнений тождественно с (26). Второе также равносильно (26). Для доказательства заменим во втором уравнении под знаком интеграла

$$\frac{\eta'}{\eta + \eta'} = 1 - \frac{\eta}{\eta + \eta'}.$$

Тогда оно сводится к

$$1 = \frac{1}{2} \varphi_0^0(\eta) \int_0^1 \varphi_0^0(\eta') d\eta' - \frac{1}{2} \eta \varphi_0^0(\eta) \int_0^1 \frac{\varphi_0^0(\eta') d\eta'}{\eta + \eta'}. \quad (37)$$

С другой стороны, интегрируя (36) по η , находим:

$$1 = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\eta' \varphi_0^0(\eta) \varphi_0^0(\eta') d\eta d\eta'}{\eta + \eta'} = \frac{1}{4} \int_0^1 \int_0^1 \varphi_0^0(\eta) \varphi_0^0(\eta') d\eta d\eta' = \frac{1}{4} \left[\int_0^1 \varphi_0^0(\eta) d\eta \right]^2,$$

т. е.

$$\int_0^1 \varphi_0^0(\eta) d\eta = 2.$$

Подставляя это значение интеграла в (37), видим, что действительно (36) сводится к (26). Таким образом, при $\lambda=1$ оба уравнения (30) удовлетворяются, если φ_0^0 принять равным решению (26), а φ_1^0 равным нулю.

Принимая во внимание это обстоятельство, мы можем на основании (28) и (29) написать для функции отражения

$$R = \frac{\varphi_0^0(\eta) \varphi_0^0(\eta')}{\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta'}} + x_1 \frac{\varphi_1^1(\eta) \varphi_1^1(\eta')}{\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta'}} \cos(\varphi - \varphi').$$

Если мы усредним по азимуту, то второй член исчезнет, а мы придем к следующему замечательному результату.

В случае чистого рассеяния усредненная по азимуту функция отражения при вытянутой индикатрисе $x(\cos \gamma) = 1 + x_1 \cos \gamma$ в точности равна функции отражения (25) при сферической индикатрисе рассеяния. При λ , отличных от единицы, это правило уже не будет иметь места.

Замечание о законе Ламберта. Наряду с функцией отражения $r(\eta, \varphi; \eta_0, \varphi_0)$ в фотометрии часто пользуются величиной

$$\rho = \frac{r}{\eta} = \frac{\lambda}{4\eta\eta_0} R,$$

называемой коэффициентом яркости.

Согласно эмпирическому закону Ламберта, для ряда тел (преимущественно белых, т. е. таких, для которых λ близко к единице) ρ постоянно.

В случае сферической индикатрисы рассеяния из (25) следует:

$$\rho = \frac{\lambda}{4} \frac{\varphi_0^0(\eta) \varphi_0^0(\eta_0)}{\eta + \eta_0}.$$

Таблица 4

Сферическая индикатриса рассеяния

Коэффициенты яркости при $\lambda = 1.0$

$\eta_0 \backslash \eta$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,0	—	3,12	1,81	1,37	1,14	1,01	0,913	0,849	0,798	0,758	0,728
0,1	3,12	1,95	1,51	1,28	1,14	1,05	0,977	0,926	0,884	0,852	0,825
0,2	1,81	1,51	1,32	1,19	1,11	1,04	0,994	0,957	0,925	0,900	0,878
0,3	1,37	1,28	1,19	1,13	1,07	1,03	1,00	0,975	0,953	0,946	0,918
0,4	1,14	1,14	1,11	1,07	1,05	1,02	1,00	0,987	0,972	0,961	0,951
0,5	1,01	1,05	1,04	1,03	1,02	1,01	1,00	0,997	0,988	0,981	0,977
0,6	1,913	0,977	0,994	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,998	0,998
0,7	0,849	0,926	0,957	0,975	0,987	0,997	1,00	1,01	1,01	1,01	1,02
0,8	0,798	0,884	0,925	0,953	0,972	0,988	1,00	1,01	1,02	1,02	1,03
0,9	0,758	0,852	0,900	0,946	0,961	0,981	0,998	1,01	1,02	1,03	1,04
1,0	0,728	0,825	0,878	0,918	0,951	0,977	0,998	1,02	1,03	1,04	1,06

Для ρ нами вычислена табл. 4 значений коэффициента яркости для разных пар значений η , η_0 . Мы видим, что для углов θ и θ_0 , не слишком близких к 90° , величина ρ почти постоянна и имеет значения, близкие к единице. На основании результатов предыдущего параграфа можно утверждать, что и при асферической индикатрисе рассеяния типа $x(\eta) = 1 + x_1\eta$ усредненный по азимуту коэффициент яркости почти постоянен и близок к единице.

Поскольку можно ожидать, что высшие члены в разложении индикатрисы по полиномам Лежандра, начиная с P_2 , мало влияют на усредненные по азимуту значения коэффициента яркости, и основную роль играют лишь первые два члена разложения, то следует думать, что в некотором приближении наш вывод можно обобщить на произвольные индикатрисы рассеяния. Иными словами: при произвольной индикатрисе рассеяния и при $\lambda = 1$ усредненный по азимуту коэффициент яркости при не слишком больших углах с нормалью почти постоянен и близок к единице.

Таким образом, теория приводит к следующим выводам и ограничениям о степени применимости закона Ламберта:

- 1) он применим лишь к чисто рассеивающим средам;
- 2) он относится только к усредненному по азимуту коэффициенту яркости и не учитывает зависимости от азимута;

3) даже при этих ограничениях он справедлив только для не слишком больших углов падения и отражения (до 70°).

Изложенный выше метод решения классической задачи о рассеянии света легко обобщается на случай слоев конечной оптической толщины. Это будет показано в другой нашей статье*.

Филиал Ленинградского
государственного университета,
г. Елабуга

Поступило в редакцию
24 мая 1943 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Minnaert, *Astrophysical Journal*, **93**, 403, 1941.
2. Амбарцумян, *Астрономический журнал*, **19**, № 5, 1942.

* Указанного обобщения В. А. Амбарцумян не опубликовал. Позднее это было сделано С. Чандрасекаром („Перенос лучистой энергии“, Москва, 1953). *Ред.*

ДИФФУЗИЯ СВЕТА ЧЕРЕЗ РАССЕИВАЮЩУЮ СРЕДУ БОЛЬШОЙ ОПТИЧЕСКОЙ ТОЛЩИНЫ*

В настоящей заметке рассматривается вопрос о диффузии света через мутную среду большой оптической толщины τ_0 , состоящую из плоскопараллельных слоев. Пусть наружное излучение вступает в среду через одну из ее плоских границ. В результате оно частью будет диффузно отражено обратно, а частично, продиффундировав через всю среду, выйдет через другую границу. Примем последнюю за начало отсчета оптических глубин. Тогда на ней оптическая глубина $\tau=0$, а на грани, через которую свет входит в среду, $\tau=\tau_0$. При неограниченном возрастании τ_0 поток, прошедший через среду, будет уменьшаться. Однако относительное распределение интенсивности выходящего через грань $\tau=0$ излучения по направлениям будет стремиться к некоторому предельному распределению, не зависящему от направления первоначальных падающих лучей. Увеличивая определенным образом интенсивность падающих извне на грань $\tau=\tau_0$ лучей, мы можем добиться того, чтобы и общий поток прошедшего излучения при возрастании τ_0 оставался постоянным. Тогда и сама интенсивность выходящего излучения в каждом направлении будет стремиться к определенному пределу при $\tau_0 \rightarrow \infty$. Эта интенсивность будет функцией угла между выходящим излучением и внешней нормалью. Косинус этого угла обозначим через η , а искомую предельную интенсивность через $u(\eta)$. Наша задача найти эту функцию $u(\eta)$. Эта задача эквивалентна задаче, в которой мутная среда заполняет полупространство, а в бесконечности находятся источники излучения и требуется найти распределение по направлениям лучей, выходящих с границы. Заметим также, что $u(\eta)$ определено лишь с точностью до постоянного множителя.

Для решения этого вопроса мы применим метод прибавления слоя малой толщины $\Delta\tau$, который был использован в наших предыдущих работах [1].

* ДАН СССР, 43, № 3, 106, 1944.

Благодаря очень большой величине τ_0 прибавление $\Delta\tau$ не изменит относительного распределения интенсивностей выходящих лучей по направлениям, хотя и уменьшит (при наличии в среде поглощения наряду с рассеянием) общий выходящий поток. Поэтому после прибавления слоя $\Delta\tau$ распределение будет определяться той же функцией $u(\eta)$, умноженной на множитель $1 - k\Delta\tau$, где постоянная k подлежит определению. С другой стороны, мы можем определить выходящую интенсивность, рассчитав все те изменения, которые произойдут вследствие прибавления слоя $\Delta\tau$.

Прежде всего, слой $\Delta\tau$ произведет ослабление лучей, идущих в направлении η в $1 - \frac{\Delta\tau}{\tau_0}$ раз. С другой стороны, этот слой рассеивает в направлении η излучение, идущее с прежней границы $\tau = 0$. Это рассеянное излучение определяется интегралом

$$\frac{\lambda\Delta\tau}{4\pi\eta_0} \iint x(\eta, \varphi; \eta', \varphi') u(\eta') d\eta' d\varphi',$$

где $x(\eta, \varphi; \eta', \varphi')$ есть индикатриса рассеяния. Она является функцией угла между направлениями η, φ и η', φ' . Параметр λ есть отношение коэффициента рассеяния к полному коэффициенту экстинкции.

Кроме того, часть излучения, рассеянного слоем $\Delta\tau$, попадает обратно на прежнюю грань $\tau = 0$ и претерпевает диффузное отражение от нее. Интенсивность этого отраженного излучения будет, как легко видеть, определяться через

$$\frac{\lambda\Delta\tau}{4\pi^2} \iint r(\eta, \varphi; \eta', \varphi') \frac{d\eta'}{\eta'} d\varphi' \iint x(\eta', \varphi'; -\eta'', \varphi'') d\eta'' d\varphi'',$$

где $r(\eta, \varphi; \eta', \varphi')$ есть функция, характеризующая диффузное отражение средой бесконечной оптической глубины. Ее точное определение таково: если $I(\eta, \varphi)$ есть интенсивность излучения, падающего на границу в различных направлениях η, φ , то интенсивность $I_1(\eta, \varphi)$ диффузно-отраженного света будет равна

$$I_1(\eta, \varphi) = \frac{1}{\pi} \iint r(\eta, \varphi; \eta', \varphi') I(\eta', \varphi') d\eta' d\varphi'.$$

Теперь мы можем приравнять друг к другу два выражения для интенсивности, получившейся после прибавления слоя $\Delta\tau$

$$u(\eta)(1 - k\Delta\tau) = u(\eta) \left(1 - \frac{\Delta\tau}{\eta}\right) + \frac{\lambda\Delta\tau}{4\pi\eta} \iint x(\eta, \varphi; \eta', \varphi') u(\eta') d\eta' d\varphi' + \\ + \frac{\lambda\Delta\tau}{4\pi^2} \iint r(\eta, \varphi; \eta', \varphi') \frac{d\eta'}{\eta'} d\varphi' \iint x(\eta', \varphi'; -\eta'', \varphi'') u(\eta'') d\eta'' d\varphi''$$

или

$$u(\eta) \left(\frac{1}{\eta} - k\right) = \frac{\lambda}{4\pi\eta} \iint x(\eta, \varphi; \eta', \varphi') u(\eta') d\eta' d\varphi' + \\ + \frac{\lambda}{4\pi^2} \iint r(\eta, \varphi; \eta', \varphi') \frac{d\eta'}{\eta'} d\varphi' \iint x(\eta', \varphi'; -\eta'', \varphi'') u(\eta'') d\eta'' d\varphi''. \quad (1)$$

Поскольку u не зависит от азимута, а функции x и r зависят от аргументов φ и φ' только через разность $\varphi - \varphi'$, интегралы

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\eta, \varphi; \eta', \varphi') d\varphi' = p(\eta, \eta'), \quad (2)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r(\eta, \varphi; \eta', \varphi') d\varphi' = \frac{\lambda}{4} \Phi(\eta, \eta') \quad (3)$$

не зависят от азимута φ [2].

В результате (1) переписывается в виде:

$$u(\eta)(1 - k\eta) = \frac{\lambda}{2} \int_0^1 p(\eta, \eta') u(\eta') d\eta' + \\ + \frac{\lambda^2}{4} \int_0^1 \Phi(\eta, \eta') \frac{d\eta'}{\eta'} \int_0^1 p(\eta', -\eta'') u(\eta'') d\eta''. \quad (4)$$

Если введем ядро

$$K(\eta, \eta') = p(\eta, \eta') + \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \Phi(\eta, \eta'') p(\eta'', -\eta') \frac{d\eta''}{\eta''}, \quad (5)$$

то вместо (4) для $u(\eta)$ получим интегральное уравнение:

$$u(\eta)(1 - k\eta) = \frac{\lambda\eta}{2} \int_0^1 K(\eta, \eta') u(\eta') d\eta'. \quad (6)$$

Постоянная k должна подбираться так, чтобы при данном λ это уравнение имело отличное от нуля решение.

В предыдущей работе [3] было установлено, что функция $\Phi(\eta, \eta')$ выражается в виде:

$$\Phi(\eta, \eta') = \sum_i (-1)^i x_i \frac{\psi_i(\eta) \psi_i(\eta')}{\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta'}}, \quad (7)$$

где $\psi_i(\eta)$ суть вспомогательные функции, определяемые системой уравнений

$$\psi_i(\eta) = P_i(\eta) + \frac{\lambda}{2} \eta \sum_j (-1)^{i+j} x_j \psi_j(\eta) \int_0^1 \frac{\psi_j(\eta') P_i(\eta') d\eta'}{\eta + \eta'}, \quad (8)$$

где x_j — коэффициенты разложения индикатрисы по полиномам Лежандра. С другой стороны, $p(\eta, \eta')$ представляется через полиномы Лежандра в виде:

$$p(\eta, \eta') = \sum_i x_i P_i(\eta) P_i(\eta'). \quad (9)$$

Подставляя (9) в (5), находим:

$$K(\eta, \eta') = \sum_i x_i P_i(\eta') \left\{ P_i(\eta) + \frac{\lambda}{2} (-1)^i \int_0^1 \Phi(\eta, \eta'') P_i(\eta'') \frac{d\eta''}{\eta''} \right\}$$

или, на основании (7) и (8),

$$K(\eta, \eta') = \sum_i x_i P_i(\eta') \psi_i(\eta). \quad (10)$$

Подставляя (10) в (6), получаем:

$$u(\eta) = \frac{\lambda}{2} \sum_i \frac{x_i \psi_i(\eta)}{1 - k\eta} \int_0^1 P_i(\eta') u(\eta') d\eta'.$$

Обозначим

$$\int_0^1 u(\eta) P_i(\eta) d\eta = c_i.$$

Тогда

$$u(\eta) = \frac{\lambda}{2} \sum_i \frac{x_i c_i \psi_i(\eta)}{1 - k\eta}. \quad (11)$$

Помножая на $P_j(\tau_i)$ и интегрируя, находим:

$$c_j = \frac{\lambda}{2} \sum_i a_{ij} x_i c_i, \quad (12)$$

где

$$a_{ij} = \int_0^1 \frac{\psi_i(\tau) P_j(\tau) d\tau}{1 - k\tau}. \quad (13)$$

Таким образом, искомое распределение излучения по направлениям определяется с помощью (11) через те же вспомогательные функции $\psi_i(\tau)$, причем коэффициенты c_i находятся из однородной системы (12).

Для примера рассмотрим два простейших случая.

1. *Сферическая индикатриса рассеяния.* Все x_i равны нулю, кроме $x_0=1$. Формула (11) сводится к

$$u(\tau) = \frac{c\psi_0(\tau)}{1 - k\tau}. \quad (14)$$

Таблицы функции $\psi_0(\tau)$ даны автором для различных λ . Вместо (12) имеем в данном случае:

$$1 = \frac{\lambda}{2} a_{00}.$$

Согласно (13), это означает:

$$1 = \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{\psi_0(\eta) d\eta}{1 - k\eta}. \quad (15)$$

Можно показать [3], что уравнение (14) удовлетворится, если k таково, что

$$\lambda = \frac{1}{2k} \ln \frac{1+k}{1-k}. \quad (16)$$

2. *Индикатриса рассеяния типа* $x(\tau, \varphi; \tau', \varphi') = 1 + x_1 \cos(\tau, \varphi; \tau', \varphi')$. Рассмотрим случай $\lambda=1$. При индикатрисе этого типа вообще отличны от нуля $\psi_0(\tau)$ и $\psi_1(\tau)$. Но при $\lambda=1$ мы имеем $\psi_1(\tau) = 0$, как это показано в работе автора [3]. Поэтому (11) опять сводится к (14), и связь между λ и k остается в виде (16). Но при $\lambda=1$ имеем $k=0$. Поэтому

$$u(\tau) = c\psi_0(\tau). \quad (17)$$

Отсюда приходим к следующему замечательному выводу: при чистом рассеянии относительное распределение интенсивностей выходящего излучения по направлениям при всех индикатрисах типа $1 + x_1 \cos(\tau, \varphi; \tau', \varphi')$ таково же, как и при сферической индикатрисе.

Этот вывод имеет непосредственно отношение к вопросу о распределении яркости по равномерно облачному небу. Если альbedo земной поверхности достаточно мало, равномерный облачный слой можно принять за чисто рассеивающий слой большой оптической толщины, освещенный лишь с одной стороны прямыми солнечными лучами. При малом альbedo земли излучением, падающим на нижнюю границу облачного слоя, можно пренебречь. Поэтому наблюдаемое с земли распределение интенсивности диффузно-пропущенного света Солнца по направлениям (т. е. в зависимости от зенитного расстояния) должно определяться формулой (11).

Мы не знаем формы индикатрисы рассеяния для облаков. Однако в вопросе о распределении яркости прошедшего излучения по направлениям должна играть основную роль степень ее вытянутости. Между тем степень вытянутости индикатрисы рассеяния характеризуется как раз коэффициентом x_1 ее разложения по полиномам Лежандра. Поэтому, если приближенно представить индикатрису в форме $1 + x_1 \cos(\tau, \varphi; \tau', \varphi')$, то можно думать, что неточность в получаемом распределении яркости по облачному небу (связанная с отбрасыванием высших членов разложения по полиномам Лежандра) будет не очень велика.

Учитывая это, а также естественные флуктуации, вызываемые неоднородностью облачного слоя, мы должны ожидать, что яркость равномерно облачного неба при отсутствии снегового покрова и при любой степени вытянутости индикатрисы рассеяния определяется в зависимости от зенитного расстояния формулой (17). Эта формула дает для отношения яркостей зенита и горизонта

$$\psi_0(1)/\psi_0(0) = 2,9.$$

Е. Н. Юстовой в гор. Елабуге в филиале Ленинградского государственного университета были произведены многочисленные наблюдения над распределением яркости по облачному небу. Среднее из полученных за 14 дней наблюдений, усредненных по азимуту, дает для отношения зенита к горизонту 3,0, что великолепно согласуется с предсказанием теории.

В нашей работе было показано, что формула (17) определяет также яркости по диску Солнца в общем свете. Таким образом, распределение яркости по равномерно облачному небу при отсутствии снегового покрова и распределение яркости по диску Солнца должны

совпадать, если пренебречь высшими членами разложения индикатрисы по полиномам Лежандра, начиная с члена второй степени.

Филнал Ленинградского государственного университета,
г. Елабуга

Поступило
14.IX 1943

Л И Т Е Р А Т У Р А

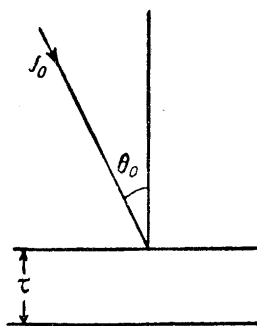
1. В. А. Амбарцумян, ДАН, **38**, 257, 1943.
2. В. А. Амбарцумян, „Изв. АН СССР“, серия географ. и геофизич., № 3, 97, 1942.
3. В. А. Амбарцумян, Астр. журн., **19**, вып. 5, 1942.

ОБ ОДНОМЕРНОМ СЛУЧАЕ ЗАДАЧИ О РАССЕИВАЮЩЕЙ И ПОГЛОЩАЮЩЕЙ СРЕДЕ КОНЕЧНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ ТОЛЩИНЫ*

Во многих вопросах теоретической астрофизики возникает задача о рассеянии света в среде, обладающей конечной оптической толщиной. В частности эта задача встает в теории образования линий поглощения звездными атмосферами, в теории рассеяния света планетными атмосферами и т. д.

При этом среда должна рассматриваться как обладающая способностью не только рассеяния, но и поглощения.

В трехмерном случае задача эта ставится следующим образом: имеется среда, состоящая из плоскопараллельных слоев, оптической толщины τ . Задано для этой среды отношение коэффициента рассеяния к сумме коэффициентов рассеяния и поглощения. На одну из граней среды падает излучение интенсивности J_0 под углом θ_0 с нормалью. Каковы будут интенсивность и распределение по направлениям рассеянного, диффузно-отраженного света и каковы будут интенсивность и распределение по направлениям диффузно-пропущенного средой света? Индикатриса рассеяния среды предполагается заданной.



Изложенная задача приводит к некоторому интегральному уравнению, решение которого представляет значительную трудность.

В связи с этим представляет интерес рассмотреть сначала более простую *одномерную* задачу о рассеянии. Оказывается, что и эта задача приводит к интегральному уравнению с конечной областью интегрирования. Ядром уравнения в этом случае служит ядро Лалеско

$$\frac{1}{2} e^{-|\tau-t|}.$$

* „Изв. АН АрмССР“, естеств. науки, № 1 —2, 1944.

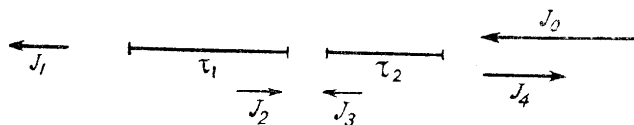
Однако можно показать, что как одномерная, так и трехмерная задача могут быть решены путем сведения их к некоторым функциональным уравнениям. При этом имеется то преимущество, что в качестве неизвестных в эти уравнения входят только величины, характеризующие положение на обеих границах среды (напр. интенсивности излучения), т. е. как раз искомые величины. Между тем в методе интегральных уравнений в качестве неизвестных фигурируют функции, характеризующие положение дел в каждой точке внутри среды. Кроме того, сам метод функциональных уравнений гораздо проще и быстрее приводит к цели.

а) *Основные уравнения.* Пусть имеем одномерную среду с оптической толщиной τ . Тогда эта среда отражает некоторую долю падающей на нее интенсивности J_0 , именно rJ_0 , и пропускает некоторую долю qJ_0 . В случае, когда в среде нет поглощения, а происходит лишь чистое рассеяние, очевидно $q = 1 - r$. При этом величина r зависит от оптической толщины τ . Положение дел в этом случае представлено на чертеже.



Рассмотрим два „слоя“ с оптическими толщинами τ_1 и τ_2 , расположенных один за другим, так что в совокупности они образуют один слой оптической толщины $\tau_1 + \tau_2$.

Обозначим интенсивность на границах, а также на стыке сред так, как это показано на следующей схеме.



Мы имеем, с одной стороны,

$$J_1 = q(\tau_1 + \tau_2)J_0. \quad (1)$$

С другой стороны, мы можем написать по определению величин q и r :

$$J_3 = q(\tau_2)J_0 + r(\tau_2)J_2$$

$$J_2 = r(\tau_1)J_3$$

$$J_1 = q(\tau_1)J_3.$$

Из последних трех равенств имеем:

$$J_1 = \frac{q(\tau_1)q(\tau_2)}{1 - r(\tau_1)r(\tau_2)} J_0.$$

Сопоставляя с (1), получаем:

$$q(\tau_1 + \tau_2) = \frac{q(\tau_1)q(\tau_2)}{1 - r(\tau_1)r(\tau_2)}. \quad (2)$$

Что касается J_4 , то мы имеем:

$$J_4 = q(\tau_2)J_2 + r(\tau_2)J_0$$

или, поскольку

$$J_4 = r(\tau_1 + \tau_2)J_0,$$

то, исключая J_2 , получаем:

$$r(\tau_1 + \tau_2) = r(\tau_2) + \frac{q(\tau_2)^2 r(\tau_1)}{1 - r(\tau_1)r(\tau_2)}. \quad (3)$$

Уравнения (2) и (3) представляют собою систему двух функциональных уравнений для двух неизвестных функций $q(\tau)$ и $r(\tau)$.

б) *Чистое рассеяние.* Найдем сперва частное решение этой системы для случая чистого рассеяния:

$$r(\tau) = 1 - q(\tau). \quad (4)$$

Подставляя это условие в (2), получаем для $q(\tau)$ одно функциональное уравнение

$$q(\tau_1 + \tau_2) = \frac{q(\tau_1)q(\tau_2)}{q(\tau_1) + q(\tau_2) - q(\tau_1)q(\tau_2)}, \quad (5)$$

откуда следует

$$\frac{1}{q(\tau_1 + \tau_2)} = \frac{1}{q(\tau_1)} + \frac{1}{q(\tau_2)} - 1$$

или, если вычтем единицу из обеих частей равенства:

$$\frac{1}{q(\tau_1 + \tau_2)} - 1 = \frac{1}{q(\tau_1)} - 1 + \frac{1}{q(\tau_2)} - 1.$$

Отсюда видно, что функция

$$\frac{1}{q(\tau)} - 1$$

должна быть линейной однородной функцией от τ . Обозначим ее через $a\tau$.

$$\frac{1}{q(\tau)} - 1 = a\tau,$$

откуда

$$q(\tau) = \frac{1}{1 + a\tau}. \quad (6)$$

Это и есть решение функционального уравнения (5).

Значение коэффициента a определяется при этом по заданной индикатрисе рассеяния. Для нахождения a уточним сперва понятие об индикатрисе рассеяния для одномерного случая.

Из проходящей интенсивности J элемент оптической глубины $d\tau$ поглощает интенсивность $Jd\tau$. Из этого количества доля $(1-\lambda) Jd\tau$ подвергается истинному поглощению и больше не участвует в игре. Другая же доля $\lambda Jd\tau$ рассеивается элементом $d\tau$, т. е. излучается элементом $d\tau$ в обе стороны. При этом некоторая часть $x\lambda Jd\tau$ излучается в том же направлении, в котором шло само излучение J , а другая часть $(1-x)\lambda Jd\tau$ излучается в противоположном направлении.

Задание величины x и означает задание „индикатрисы“ рассеяния в одномерном случае.

При заданной индикатрисе x постоянная a формулы (6) должна быть одной и той же для всех τ , в том числе при малой оптической толщине слоя, когда (6) сводится к

$$q(\tau) = 1 - a\tau. \quad (7)$$

С другой стороны, очевидно, что интенсивность прошедшего через слой малой оптической толщины τ излучения будет равна:

$$J = J_0(1 - \tau) + \lambda x J_0 \tau,$$

откуда при $\lambda = 1$

$$q = 1 - (1 - x)\tau. \quad (8)$$

Сравнивая (7) и (8), получаем:

$$a = 1 - x, \quad (9)$$

т. е. a определяет долю света, рассеиваемого обратно.

Итак, вообще,

$$q(\tau) = \frac{1}{1 + (1 - x)\tau}. \quad (10)$$

При $x = \frac{1}{2}$, т. е. при „равновероятном рассеянии“ в обе стороны, что аналогично сферической индикатрисе в трехмерном случае:

$$q(\tau) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\tau}. \quad (11)$$

в) *Общий случай.* Перейдем теперь к общему случаю, когда наряду с рассеянием в среде имеется и поглощение, причем λ постоянно.

При слое очень малой оптической толщины $d\tau$ мы имеем для коэффициента отражения:

$$r = \lambda(1 - x) d\tau, \quad (12)$$

а для коэффициента пропускания:

$$q = 1 - (1 - \lambda x) d\tau. \quad (13)$$

Воспользуемся выражениями (12) и (13) и, приняв в (2) и (3) τ_1 очень малым и равным $d\tau$, напишем получающиеся равенства:

$$q(\tau + d\tau) = \frac{q(\tau) \{ 1 - (1 - \lambda x) d\tau \}}{1 - r(\tau) \lambda (1 - x) d\tau},$$

$$r(\tau + d\tau) = r(\tau) + \frac{q(\tau)^2 \lambda (1 - x) d\tau}{1 - r(\tau) \lambda (1 - x) d\tau}.$$

Пренебрегая членами, содержащими $d\tau^2$, находим:

$$\frac{dq(\tau)}{d\tau} = \lambda(1 - x) q(\tau) r(\tau) - (1 - \lambda x) q(\tau) \quad (14)$$

$$\frac{dr(\tau)}{d\tau} = \lambda(1 - x) q(\tau)^2. \quad (15)$$

Деля (14) на (15), имеем:

$$q dq = r dr - \frac{1 - \lambda x}{\lambda(1 - x)} dr,$$

откуда

$$q^2 - r^2 = C - \frac{2(1 - \lambda x)}{\lambda(1 - x)} r,$$

где C — постоянная интегрирования. Но, при $q = 1$ (полное пропускание, что соответствует $\tau = 0$), отражение $r = 0$. Поэтому $C = 1$. Мы имеем:

$$1 + r^2 - q^2 - \frac{2(1 - \lambda x)}{\lambda(1 - x)} r = 0. \quad (16)$$

Подставляя (16) в (15), находим:

$$\frac{dr}{1 + r^2 - \frac{2(1 - \lambda x)}{\lambda(1 - x)} r} = d\tau. \quad (17)$$

Обозначим корни уравнения

$$1 - r^2 - \frac{2(1 - \lambda x)}{\lambda(1 - x)} r = 0$$

через r_0 и $\frac{1}{r_0}$ и выберем $r_0 \leq 1$.

Тогда (16) перепишется в виде:

$$(r_0 - r) \left(\frac{1}{r_0} - r \right) = q^2, \quad (18)$$

а уравнение (17) после интегрирования даст

$$r = r_0 \frac{1 - \frac{C}{r_0^2} e^{-2k\tau}}{1 - C e^{-2k\tau}},$$

где

$$k = \frac{\lambda}{2} (1 - x) \frac{1 - r_0^2}{r_0}, \quad (19)$$

а C — постоянная интегрирования. Но при $\tau = 0$ должно быть $r = 0$. Поэтому $C = r_0^2$. Итак,

$$r = r_0 \frac{1 - e^{-2k\tau}}{1 - r_0^2 e^{-2k\tau}}. \quad (20)$$

Подставляя это выражение в (16), находим для q :

$$q = \frac{(1 - r_0^2) e^{-k\tau}}{1 - r_0^2 e^{-2k\tau}}. \quad (21)$$

Из формулы (20) видно, что r_0 есть значение коэффициента отражения при $\tau = 0$.

Формулы (20) и (21) представляют собою решение системы функциональных уравнений (2) и (3).

Академия наук АрмССР,
Астрономическая обсерватория
1943, ноябрь

ТОЧЕЧНЫЙ ИСТОЧНИК СВЕТА В МУТНОЙ СРЕДЕ*

Как известно, наиболее сложным разделом теории светового поля является раздел, посвященный рассеянию света в мутной среде. В работах последних лет вопрос о световом режиме в мутной среде в случае плоскопараллельных слоев нашел подробное освещение. Однако другой идеальный случай, именно, случай точечного источника в однородной мутной среде, заполняющей все пространство, почти совершенно не исследован. Настоящая статья содержит некоторые результаты, относящиеся к этой проблеме, для частного случая сферической индикатрисы рассеяния.

Пусть α есть коэффициент экстинкции. В силу однородности среды он постоянен во всем пространстве, так же как коэффициент рассеяния σ .

Обозначим

$$k = \frac{\sigma}{\alpha} \quad (1)$$

и введем вместо прямоугольных координат x, y, z величины

$$u = \alpha x; v = \alpha y; w = \alpha z. \quad (2)$$

Точно так же будем обозначать

$$\tau = \alpha \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \alpha r = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}. \quad (3)$$

Величину τ можно назвать оптическим расстоянием до начала координат. Пусть точечный источник помещается в начале координат. В силу сферической симметрии задачи коэффициент излучения η будет зависеть только от τ , а следовательно и отдача

$$B(\tau) = \frac{\eta(\tau)}{\alpha} \quad (4)$$

будет функцией, зависящей только от τ . Так как мы предполагаем

* Бюллетень Ереванской астрономической обсерватории, № 6, 3, 1945.

сферическую индикатрису рассеяния, то величина $B(\tau)$ от направления не зависит.

Если $4\pi^2 S$ есть полный поток излучения, испускаемый нашим точечным источником, то поток прямого излучения на расстоянии r от начала координат через единичную площадку, нормальную к радиус-вектору, проведенному от источника, будет равен:

$$F = \frac{\pi S}{r^2} e^{-ar}$$

или

$$F = \frac{\pi S a^2}{\tau^2} e^{-\tau}. \quad (5)$$

Поэтому условие лучевого равновесия для рассматриваемого случая по аналогии с плоскопараллельным случаем напишется в виде

$$4\pi B(\tau) = \frac{\lambda \pi S a^2}{\tau^2} e^{-\tau} + \\ + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\tau_1) e^{-[(u-u_1)^2 + (v-v_1)^2 + (w-w_1)^2]^{1/2}} du_1 dv_1 dw_1}{(u-u_1)^2 + (v-v_1)^2 + (w-w_1)^2}$$

или

$$B(\tau) = \frac{\lambda S a^2}{4} \frac{e^{-\tau}}{\tau^2} + \frac{\lambda}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\tau_1) e^{-[(u-u_1)^2 + (v-v_1)^2 + (w-w_1)^2]^{1/2}} du_1 dv_1 dw_1}{(u-u_1)^2 + (v-v_1)^2 + (w-w_1)^2}. \quad (6)$$

Неоднородное интегральное уравнение (6) и подлежит нашему рассмотрению.

Функция $B(\tau)$, стоящая в левой части, зависит через τ от переменных u, v, w , так же как правая часть уравнения (6). Помножим обе части (5) на $dv dw$ и проинтегрируем. Для левой части будем иметь:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}) dv dw = 2\pi \int_0^{\infty} B(\sqrt{u^2 + t^2}) t dt, \quad (7)$$

где $t^2 = u^2 + w^2$. Введем в правой части (7) переменную интегрирования $\tau = \sqrt{u^2 + t^2}$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) dv dw = 2\pi \int_u^{\infty} B(\tau) \tau d\tau. \quad (8)$$

Точно так же

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\tau}}{\tau^2} dv dw = 2\pi \int_{|u|}^{\infty} \frac{e^{-\tau}}{\tau} d\tau = 2\pi Ei|u|. \quad (9)$$

Наконец

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-[(u-u_1)^2 + (v-v_1)^2 + (w-w_1)^2]^{1/2}}}{(u-u_1)^2 + (v-v_1)^2 + (w-w_1)^2} dv dw = 2\pi Ei|u-u_1|. \quad (10)$$

Поэтому (6) переписывается в виде:

$$\int_{|u|}^{\infty} B(\tau) \tau d\tau = \frac{\lambda S \alpha^2}{4} Ei|u| + \frac{\lambda}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Ei|u-u_1| du_1 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau_1) dv_1 dw_1 \quad (11)$$

или, на основании (8),

$$\int_{|u|}^{\infty} B(\tau) \tau d\tau = \frac{\lambda S \alpha^2}{4} Ei|u| + \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} Ei|u-u_1| du_1 \int_{|u_1|}^{\infty} B(\tau_1) \tau_1 d\tau_1. \quad (12)$$

Обозначим

$$\int_{\tau_1}^{\infty} B(\tau) \tau d\tau = A(\tau). \quad (13)$$

Тогда

$$A(\tau) = \frac{\lambda S \alpha^2}{4} Ei(\tau) + \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} Ei|\tau-t| A(t) dt. \quad (14)$$

Это интегральное уравнение и подлежит нашему исследованию.

Как это следует из общей теории, при $\lambda < 1$ это уравнение имеет только одно решение, ограниченное при $|\tau| \rightarrow \infty$. Мы можем свободный член этого уравнения представить в виде:

$$\frac{\lambda S \alpha^2}{4} Ei|\tau| = \frac{\lambda S \alpha^2}{4} \int e^{-\frac{|\tau|}{\xi}} \frac{d\xi}{\xi}. \quad (15)$$

Поэтому решение (14) можно представить как суперпозицию решений уравнения

$$\beta(\tau, \xi) = e^{-\frac{|\tau|}{\xi}} + \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} Ei|\tau - t| \beta(t, \xi) dt, \quad (16)$$

где β зависит очевидно от параметра ξ , входящего в свободный член. Очевидно, что между β и A будет существовать соотношение:

$$A(\tau) = \frac{\lambda Sa^2}{4} \int_0^1 \beta(\tau, \xi) \frac{d\xi}{\xi}. \quad (17)$$

Рассмотрим подробнее уравнение (16) для $\beta(\tau, \xi)$. Продифференцируем это уравнение по τ .

$$\frac{d\beta(\tau, \xi)}{d\tau} = -\frac{1}{\xi} \frac{d|\tau|}{d\tau} e^{-\frac{|\tau|}{\xi}} + \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} Ei|\tau - t| \frac{d\beta(t, \xi)}{dt} dt. \quad (18)$$

Множитель $\frac{d|\tau|}{d\tau}$ имеет разрыв в точке $\tau = 0$. Поэтому свободный член уравнения (18) имеет также разрыв, равный $-\frac{2}{\xi}$. Нетрудно видеть, что и решение уравнения (18) $\frac{d\beta(t, \xi)}{dt}$ при $t = 0$ имеет разрыв.

$$\left[\frac{d\beta(t, \xi)}{dt} \right]_{t=+0} - \left[\frac{d\beta(t, \xi)}{dt} \right]_{t=-0} = -\frac{2}{\xi}. \quad (19)$$

Учитывая это, продифференцируем уравнение (18) еще раз по τ .

$$\begin{aligned} \frac{d^2\beta(t, \xi)}{d\tau^2} &= \frac{1}{\xi^2} e^{-\frac{|\tau|}{\xi}} + \frac{\lambda}{2} \frac{d}{d\tau} \int_{\tau}^{\infty} Ei(t - \tau) \frac{d\beta(t, \xi)}{dt} dt + \\ &+ \frac{\lambda}{2} \frac{d}{d\tau} \int_{-\infty}^{\tau} Ei(t - \tau) \frac{d\beta(t, \xi)}{dt} dt \end{aligned}$$

или, если $\tau > 0$,

$$\frac{d^2\beta(\tau, \xi)}{d\tau^2} = \frac{1}{\xi^2} e^{-\frac{\tau}{\xi}} + \frac{\lambda}{2} \frac{d}{d\tau} \int_0^{\infty} Eix \frac{d\beta(x + \tau, \xi)}{dx} dx -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\lambda}{2} \frac{d}{d\tau} \int_0^{\infty} Eix \frac{d\beta(\tau-x, \xi)}{dx} dx = \\
& = \frac{1}{\xi^2} e^{-\frac{|\tau|}{\xi}} + \frac{\lambda}{2} \frac{d}{d\tau} \int_0^{\infty} Eix \frac{d\beta(x+\tau, \xi)}{d\tau} dx + \\
& + \frac{\lambda}{2} \frac{d}{d\tau} \int_0^{\tau} Eix \frac{d\beta(\tau-x, \xi)}{d\tau} dx + \frac{\lambda}{2} \frac{d}{d\tau} \int_{\tau}^{\infty} Eix \frac{d\beta(\tau-x, \xi)}{d\tau} dx = \\
& = \frac{1}{\xi^2} e^{-\frac{|\tau|}{\xi}} + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} \frac{d^2\beta(t, \xi)}{dt^2} Ei|\tau-t| dt + \frac{\lambda}{2} Ei\tau \left[\frac{d\beta(\tau)}{d\tau} \right]_{\tau=+\infty} - \\
& - \frac{\lambda}{2} Ei\tau \left[\frac{d\beta(\tau)}{d\tau} \right]_{\tau=-\infty} = \\
& = \frac{1}{\xi^2} e^{-\frac{|\tau|}{\xi}} - \frac{\lambda}{\xi} Ei|\tau| + \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} Ei|\tau-t| \frac{d^2\beta(t, \xi)}{dt^2} dt.
\end{aligned}$$

К тому же выражению (при ином промежуточном преобразовании) мы придем при $\tau < 0$. Итак, второе дифференцирование привело к уравнению для второй производной.

$$\frac{d^2\beta(\tau, \xi)}{d\tau^2} = \frac{1}{\xi^2} e^{-\frac{|\tau|}{\xi}} - \frac{\lambda}{\xi} Ei|\tau| + \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} Ei|\tau-t| \frac{d^2\beta(t, \xi)}{dt^2} dt \quad (20)$$

или

$$\frac{d^2\beta(\tau, \xi)}{d\tau^2} = \frac{1}{\xi^2} e^{-\frac{|\tau|}{\xi}} - \frac{\lambda}{\xi} \int_0^1 e^{-\frac{|\tau|}{\eta}} \frac{d\eta}{\eta} + \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} Ei|\tau-t| \frac{d^2\beta(\tau, \xi)}{dt^2} dt. \quad (21)$$

Поскольку свободный член (21) представляет собою суперпозицию величин типа свободного члена (16), то и решение (21) можно представить как суперпозицию решений уравнения (16), т. е.

$$\frac{d^2\beta(\tau, \xi)}{d\tau^2} = \frac{1}{\xi^2} \beta(\tau, \xi) - \frac{\lambda}{\xi} \int_0^1 \beta(\tau, \eta) \frac{d\eta}{\eta}. \quad (22)$$

Это соотношение мы можем рассматривать как некоторое интегро-дифференциальное уравнение для функции $\beta(\tau, \xi)$. Ищем решение этого уравнения в форме:

$$\beta(\tau, \eta) = C(\eta) e^{-k|\tau|}, \quad (23)$$

поскольку при $|\tau| \rightarrow \infty$ функция $\beta(\tau, \eta)$ должна стремиться к произведению двух функций, одна из которых зависит от τ , а другая от η . Подставляя в (22), имеем:

$$C(\xi) = \frac{\lambda \xi}{1 - k^2 \xi^2} \int_0^1 C(\eta) \frac{d\eta}{\eta} \quad (24)$$

или

$$C(\xi) = \frac{C\xi}{1 - k^2 \xi^2}, \quad (25)$$

где

$$C = \lambda \int_0^1 C(\eta) \frac{d\eta}{\eta}. \quad (26)$$

Подставляя в (26) правую часть (25), мы видим, что должно выполняться соотношение:

$$1 = \lambda \int_0^1 \frac{d\eta}{1 - k^2 \eta^2},$$

которое удовлетворяется только при условии:

$$\lambda = \frac{2k}{\ln \frac{1+k}{1-k}}. \quad (27)$$

Это соотношение определяет k в решении (23).

Для установления значения C в (25) рассмотрим тождество

$$e^{-k\tau} = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} Ei|\tau - t| e^{-kt} dt, \quad (28)$$

где k предполагается определенным из (27). Преобразуем его

$$e^{-k\tau} = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^0 Ei|\tau - t| e^{-kt} dt - \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} Ei|\tau - t| e^{kt} dt +$$

$$+ \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} Ei|\tau - t| e^{-k|t|} dt.$$

При $\tau > 0$ будем отсюда иметь:

$$\begin{aligned} e^{-kt} &= \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{dr_i}{\eta} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(\tau-t)}{\eta}} e^{-kt} dt - \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{d\eta}{\eta} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(\tau-t)}{\eta}} e^{kt} dt + \\ &+ \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} Ei|\tau - t| e^{-k|t|} dt = \\ &= \frac{\lambda}{2} \int_0^1 e^{-\frac{\tau}{\eta}} \left\{ \frac{1}{\frac{1}{\eta} - k} - \frac{1}{\frac{1}{\eta} + k} \right\} \frac{d\eta}{\eta} + \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} Ei|\tau - t| e^{-k|t|} dt, \end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned} e^{-k\tau} - \lambda k \int_0^1 e^{-\frac{\tau}{\eta}} \frac{\eta d\eta}{1 - k^2 \eta^2} = \\ = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} Ei|\tau - t| e^{-k|t|} dt. \quad (\tau > 0) \quad (29) \end{aligned}$$

Нужно подчеркнуть, что эта формула справедлива при $\tau > 0$. Рассматривая теперь тождество

$$e^{k\tau} = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} Ei|\tau - t| e^{kt} dt,$$

при отрицательных τ будем иметь:

$$\begin{aligned} e^{k\tau} &= \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} Ei|\tau - t| e^{kt} dt - \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} Ei|\tau - t| e^{-kt} dt + \\ &+ \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} Ei|\tau - t| e^{-k|t|} dt. \end{aligned}$$

Преобразуя, получаем для $\tau < 0$:

$$e^{kt} - \lambda k \int_0^1 e^{-\frac{|\tau|}{\tau_1}} \frac{\tau_1 d\tau_1}{1 - k^2 \tau_1^2} = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} Ei|\tau - t| e^{-k|t|} dt. \quad (30)$$

Принимая во внимание, что (29) справедливо при $\tau > 0$, а (30) для $\tau < 0$, мы можем вообще написать:

$$e^{-k|\tau|} = \lambda k \int_0^{\infty} e^{-\frac{|\tau|}{\tau_1}} \frac{\tau_1 d\tau_1}{1 - k^2 \tau_1^2} + \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} Ei|\tau - t| e^{-k|t|} dt. \quad (31)$$

Сравнивая теперь (31) с (16), мы видим, что функция $e^{-k|\tau|}$ может быть получена как суперпозиция функций $\beta(\tau, \xi)$

$$e^{-k|\tau|} = \lambda k \int_0^1 \frac{\beta(\tau, \tau_1) \tau_1 d\tau_1}{1 - k^2 \tau_1^2}. \quad (32)$$

Принимая во внимание, что это равенство справедливо для всех τ , применим его к большим τ , для чего подставим в него асимптотическое выражение (23), в котором $C(\tau_1)$ заменим через (25):

$$1 = \lambda k C \int_0^1 \frac{\tau_1^2 d\tau_1}{1 - k^2 \tau_1^2},$$

откуда

$$C = \frac{1}{\lambda k \int_0^1 \frac{\tau_1^2 d\tau_1}{1 - k^2 \tau_1^2}}.$$

Интегрирование дает

$$C = \frac{k}{\lambda \left\{ \frac{1}{2k} \ln \frac{1+k}{1-k} - 1 \right\}} = \frac{k}{1-\lambda}. \quad (33)$$

Итак, согласно (25),

$$C(\xi) = \frac{k}{1-\lambda} \frac{\xi}{1 - k^2 \xi^2} \quad (34)$$

и для больших τ мы имеем асимптотическую формулу:

$$\beta(\tau, \xi) = \frac{k}{1-\lambda} \frac{\xi}{1 - k^2 \xi^2} e^{-k|\tau|}. \quad (35)$$

Согласно (17), отсюда мы получим выражение для $A(\tau)$:

$$A(\tau) = \frac{\lambda S \alpha^2}{4} \frac{k}{1-\lambda} \int_0^1 e^{-k|\tau|} \frac{d\xi}{1-k^2\xi^2}$$

или

$$A(\tau) = \frac{S \alpha^2}{4} \frac{k}{1-\lambda} e^{-k|\tau|}, \quad (36)$$

где мы опять воспользовались соотношением (27).

Из (13) и (36) находим:

$$B(\tau) = \frac{S \alpha^2}{4} \frac{k^2}{1-\lambda} \frac{1}{\tau} e^{-k\tau}. \quad (37)$$

Это и есть асимптотическое решение нашей задачи.

Август 1943 г.

Примечание. В самом конце статьи автором допущена ошибка. Подстановка (23) в (32) в действительности дает:

$$C = \frac{1}{\lambda k \int_0^1 \frac{\eta^2 d\eta}{(1-k^2\eta^2)^2}} = \frac{2k(1-k^2)}{\lambda + k^2 - 1}.$$

Поэтому для $B(\tau)$ получается следующее асимптотическое выражение:

$$B(\tau) = \frac{S \alpha^2}{2} \frac{k^2(1-k^2)}{\lambda + k^2 - 1} e^{-k\tau}.$$

Рассмотренная в этой статье задача о точечном источнике в безграничной поглощающей и рассеивающей среде рассматривалась также в теории диффузии нейтронов. Для этого использовался метод, основанный на преобразовании Фурье. В результате было получено не только асимптотическое, но и точное решение задачи (см., например, А. Д. Галанин, Теория ядерных реакторов на тепловых нейтронах, Атомгиз, 1959).

О ДИФФУЗНОМ ОТРАЖЕНИИ И ПРОПУСКЕНИИ СВЕТА АНИЗОТРОПНОЙ ОДНОМЕРНОЙ РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДОЙ КОНЕЧНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ ТОЛЩИНЫ*

(Представлено 10.XII 1947)

В одной из наших работ [1] было показано, как задача о диффузном отражении и пропускании света одномерной, изотропной рассеивающей и поглощающей средой конечной оптической толщины может быть разрешена с помощью некоторых функциональных уравнений.

Мы считали среду изотропной, хотя само рассеяние в ней могло быть анизотропным в том смысле, что при элементарном акте рассеяния энергия могла направляться не поровну в обе стороны, а определенная доля x в направлении падающего луча, а доля $1 - x$ в противоположном направлении.

Здесь же мы возьмем анизотропную среду такую, что доля энергии, рассеиваемой в направлении падающего луча и в противоположном направлении, будет соответственно x и $1 - x$, когда луч падает слева и y и $1 - y$, когда луч падает справа. В частном случае, когда $x = y$, имеем изотропную среду с анизотропным рассеянием.

В результате мы будем иметь следующий макроскопический эффект при диффузном пропускании и отражении. Пусть имеем одномерную среду конечной оптической толщины. Когда излучение падает на нее слева (см. фиг. 1), мы будем иметь один коэффициент пропускания q_1 и коэффициент диффузного отражения r_1 .

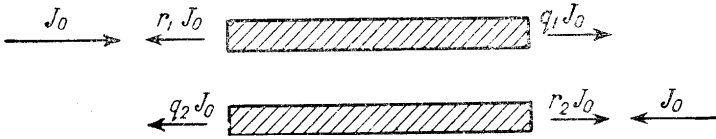
Когда же на тот же слой излучение падает справа, мы будем иметь другие коэффициенты диффузного пропускания q_2 и диффузного отражения r_2 .

Задачей является установление зависимости этих четырех коэффициентов от оптической толщины. В настоящей заметке мы разберем только случай чистого анизотропного рассеяния. При чистом рассеянии

* ДАН АрмССР, 7, 199, 1947.

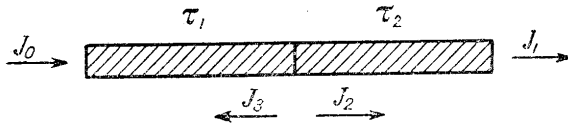
$$\begin{aligned} r_1 &= 1 - q_1, \\ r_2 &= 1 - q_2 \end{aligned} \quad (1)$$

и остается определить только q_1 и q_2 . Эти величины могут быть найдены путем решения соответствующих уравнений переноса. Однако здесь мы используем элегантный метод функциональных уравнений, который был уже нами развит для частного случая изотропной среды.



Фиг. 1.

Для вывода приложим друг к другу две среды с оптическими толщинами τ_1 и τ_2 таким образом, чтобы у них была одинаковая ориентация.



Фиг. 2.

Пусть на границе между средами τ_1 и τ_2 интенсивность излучения, идущего направо, будет I_2 , а излучения, идущего налево, I_3 . Если I_0 и I_1 суть интенсивности падающего слева и выходящего справа излучений соответственно, а интенсивность излучения, входящего в среду справа, равна нулю, то очевидно должны иметь место соотношения

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= q_1 (\tau_1 + \tau_2) I_0 \\ I_1 &= q_1 (\tau_2) I_2 \\ I_3 &= r_1 (\tau_2) I_2 \\ I_2 &= q_1 (\tau_1) I_0 + r_2 (\tau_1) I_3 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Условием совместности этих четырех однородных уравнений является

$$q (\tau_1 + \tau_2) = \frac{q_1 (\tau_1) q_1 (\tau_2)}{1 - r_2 (\tau_1) r_1 (\tau_2)}. \quad (3)$$

Внося (1) в (3), получаем:

$$q_1(\tau_1 + \tau_2) = \frac{q_1(\tau_1) q_1(\tau_2)}{q_2(\tau_1) + q_1(\tau_2) - q_2(\tau_1) q_1(\tau_2)}. \quad (4)$$

Аналогичное уравнение получим, рассматривая случай излучения, падающего справа

$$q_2(\tau_1 + \tau_2) = \frac{q_2(\tau_1) q_2(\tau_2)}{q_2(\tau_1) + q_1(\tau_2) - q_2(\tau_1) q_1(\tau_2)}. \quad (5)$$

Разделив (5) на (4), получаем:

$$\frac{q_2(\tau_1 + \tau_2)}{q_1(\tau_1 + \tau_2)} = \frac{q_2(\tau_1) q_2(\tau_2)}{q_1(\tau_1) q_1(\tau_2)}, \quad (6)$$

откуда очевидно, что

$$\frac{q_2(\tau)}{q_1(\tau)} = e^{k\tau}. \quad (7)$$

Теперь возьмем обратные величины от обеих частей уравнения (4).

$$\frac{1}{q_1(\tau_1 + \tau_2)} = \frac{1}{q_1(\tau_1)} + \frac{q_2(\tau_1)}{q_1(\tau_1)} \left\{ \frac{1}{q_1(\tau_2)} - 1 \right\}. \quad (8)$$

Вычитая из обеих частей единицу и учитывая (7), находим:

$$\frac{1}{q_1(\tau_1 + \tau_2)} - 1 = \frac{1}{q_1(\tau_1)} - 1 + e^{k\tau_1} \left\{ \frac{1}{q_1(\tau_2)} - 1 \right\}. \quad (9)$$

Обозначая

$$\frac{1}{q_1(\tau)} - 1 = f(\tau), \quad (10)$$

переписываем (9) в виде:

$$f(\tau_1 + \tau_2) = f(\tau_1) + e^{k\tau_1} f(\tau_2). \quad (11)$$

Дифференцируя по τ_2 , находим:

$$f'(\tau_1 + \tau_2) = e^{k\tau_1} f'(\tau_2)$$

или, полагая $\tau_2 = 0$,

$$f'(\tau) = f'(0) e^{k\tau} = k A e^{k\tau},$$

где A — постоянная.

Отсюда

$$f(\tau) = A (e^{k\tau} - 1),$$

так как из (11) очевидно, что $f(0) = 0$. Следовательно,

$$q_1(\tau) = \frac{1}{1 + A (e^{k\tau} - 1)}. \quad (12)$$

Кроме того, на основании (7),

$$q_2(\tau) = \frac{1}{e^{-k\tau} + A(1 - e^{-k\tau})}. \quad (13)$$

Выражения (12) и (13) представляют собой решение системы (4) и (5) в конечном виде. Во всех решениях, имеющих физический смысл, $A > 1$.

Самым интересным является то, что при $k \neq 0$ одно из выражений (12) и (13) (в зависимости от знака k) стремится при $\tau \rightarrow \infty$ к постоянной величине. Иными словами, несмотря на беспредельное возрастание оптической толщины, прозрачность в одном направлении стремится к отличной от нуля постоянной (в другом направлении она стремится к нулю).

Ясно также, что в случае изотропии среды $k = 0$ и из (11) получаем функциональное уравнение, уже рассмотренное в предыдущей работе.

Бюраканская астрономическая обсерватория
Академии наук Армянской ССР
Ереван, 1947, ноябрь.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. Амбарцумян, „Изв. АН Армянской ССР, серия естеств. наук, № 1—2, 31, 1944.

О ЧИСЛЕ РАССЕЯНИЙ ПРИ ДИФФУЗИИ ФОТОНОВ В МУТНОЙ СРЕДЕ*

(Представлено 21.II 1948)

Теория рассеяния света в мутной среде (т. е. в среде, где происходит как поглощение, так и рассеяние) разбирает стационарные задачи теории диффузии фотонов через среду. При этом в качестве основной задачи в теории рассеяния всегда ставился вопрос о вычислении интенсивности света в заданной точке и в заданном направлении. Вопрос же о статистике чисел рассеяний, испытанных квантами, входящими в состав того или иного пучка, обычно не ставился. Между тем оказывается возможным решить и этот вопрос, оставаясь в рамках стационарной задачи, т. е. без рассмотрения хода процесса во времени. Это решение и составляет цель настоящей заметки.

Рассматриваемая при этом проблема многократного рассеяния в мутной среде может носить весьма общий характер. Среда может занимать объем любой формы. Зависимость коэффициента рассеяния σ от координат в этом объеме может быть какой угодно. Точно так же падающее извне излучение, заданное нам, может иметь любую зависимость от координат точек на границе среды и направления падения. Может быть задано также любое распределение источников фотонов. Даже индикатриса рассеяния может меняться от точки к точке. Единственное допущение, делаемое нами, заключается в том, что коэффициент поглощения κ пропорционален коэффициенту рассеяния и что, следовательно, отношение

$$\sigma = \frac{\sigma}{\sigma + \kappa},$$

представляющее вероятность „выживания“ фотона при элементарном акте взаимодействия его с частицами среды, есть величина постоянная.

Это отношение λ входит в уравнение переноса

* ДАН АрмССР, 8, 101, 1948.

$$\frac{1}{\sigma + \kappa} \frac{dI}{ds} = -I + \frac{\lambda}{4\pi} \int x(\gamma, P) I d\omega + \frac{\varepsilon}{4\pi}, \quad (1)$$

где I есть интенсивность излучения, $x(\gamma, P)$ есть индикатриса рассеяния, представляющая собою функцию как угла рассеяния γ , так и точки P , а ε — плотность источников.

При заданных предельных условиях решение уравнения (1) является функцией точки, направления и величины λ .

Очевидно, что интенсивность для любой точки и направления при $\lambda=1$ (чистое рассеяние) может быть представлена в виде:

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} I_n,$$

где I_n есть интенсивность, обусловленная фотонами, претерпевшими n рассеяний.

В общем же случае $\lambda \neq 1$, очевидно, будем иметь:

$$I(\lambda) = \sum \lambda^n I_n, \quad (2)$$

так как λ^n есть вероятность выживания фотона после n рассеяний.

Очевидно, что ряд (2) сходится в круге $|\lambda| \leq 1$.

Таким образом, достаточно взять n -ый член разложения I по степеням λ и разделить на I , чтобы узнать, какую долю среди квантов, проходящих в данной точке и в данном направлении, составляют кванты, претерпевшие n рассеяний. Иными словами, эта доля равна:

$$p_n = \lambda^n \frac{I_n}{I}. \quad (3)$$

Отсюда нетрудно найти среднее число рассеяний, приходящихся на один квант данного пучка. Оно равно:

$$\bar{n} = \sum n p_n = \lambda \frac{\partial \log I}{\partial \lambda}. \quad (4)$$

Точно так же можно найти среднее квадратичное отклонение по формуле

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \overline{n(n-1)} + \bar{n} - \bar{n}^2 = \frac{\lambda^2}{I} \frac{\partial^2 I}{\partial \lambda^2} + \frac{\lambda \partial I}{I \partial \lambda} - \frac{\lambda^2}{I^2} \left(\frac{\partial I}{\partial \lambda} \right)^2 = \\ &= \left(\lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) \log I. \end{aligned} \quad (5)$$

Формулы (4) и (5) остаются в силе и в тех случаях, когда речь идет о числе рассеяний квантов, идущих не в одном направлении,

а в совокупности каких-либо направлений. При этом в формулы вместо I войдет сумма или интеграл от интенсивностей по взятой совокупности направлений. Можно брать и взвешенные суммы.

В качестве примера возьмем один случай диффузного отражения света. На плоскую границу полубесконечной среды падает излучение по всем направлениям. Пусть интенсивность падающих лучей в каждом направлении пропорциональна секансу угла падения. Индикатриса рассеяния во всей среде сферическая.

Нас интересует среднее число рассеяний, испытанных световыми квантами, входящими в полный поток диффузно отраженных фотонов, независимо от угла выхода.

Если мы введем функцию отражения $r(\eta, \xi)$ от косинусов ξ и η углов падения и отражения [1], то поскольку интенсивность света, падающего на границу в направлении ξ , будет $\frac{S}{\xi}$, где S постоянная, очевидно, что интенсивность света, отраженного в направлении η по определению $r(\eta, \xi)$, равна:

$$I(\eta) = 2S \int r(\eta, \xi) \frac{d\xi}{\xi}. \quad (6)$$

Полный поток отраженных фотонов, выходящих по всем направлениям, будет:

$$H = 2 \int I(\eta) \eta d\eta = 4\pi S \iint r(\eta, \xi) \frac{\eta}{\xi} d\eta d\xi. \quad (7)$$

Но при сферической индикатрисе рассеяния, как известно [2],

$$r(\eta, \xi) = \frac{\lambda}{4} \xi \frac{\varphi(\eta) \varphi(\xi)}{\eta + \xi}, \quad (8)$$

где функция $\varphi(\eta)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\varphi(\eta) = 1 + \frac{\lambda}{2} \eta \varphi(\eta) \int_0^1 \frac{\varphi(\xi)}{\eta + \xi} d\xi. \quad (9)$$

Внося (8) в (7), находим:

$$H = \lambda \pi S \iint \frac{\eta \varphi(\eta) \varphi(\xi)}{\eta + \xi} d\eta d\xi. \quad (10)$$

Складывая (10) с таким же интегралом, в котором переменные интегрирования η и ξ заменены друг другом, получаем:

$$2H = \lambda \pi S \left(\int \varphi(\eta) d\eta \right)^2 = \lambda \pi S A^2, \quad (11)$$

где A интеграл в скобках.

Интегрируя обе стороны уравнения (9) в пределах от нуля до единицы и совершая такое же преобразование, находим:

$$A = 1 + \frac{\lambda}{4} A^2. \quad (12)$$

Поэтому

$$H = 2\pi S \frac{2 - \lambda - 2\sqrt{1 - \lambda}}{\lambda}. \quad (13)$$

Применяя формулу (4), мы найдем, что среднее число рассеяний, испытываемых квантами выходящего потока, равно:

$$\bar{n} = \lambda \frac{\partial \log H}{\partial \lambda} = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda}}. \quad (14)$$

Так, например, при $\lambda = 0,75$ имеем в среднем два рассеяния на один отраженный квант.

Однако при $\lambda \rightarrow 1$ среднее число рассеяний стремится к бесконечности. Иными словами, при $\lambda = 1$ сумма (4) расходится, хотя ряд (2) сходится.

Впрочем, бесконечное в среднем число рассеяний при $\lambda = 1$ получается только в процессе диффузного отражения при бесконечной оптической толщине чисто рассеивающего слоя. При конечной толщине n конечно.

Заметим, наконец, что в случае бесконечного слоя

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{(1 - \lambda)^{3/2}}. \quad (15)$$

Примечательным является то, что формулы (8) и (9) были получены [1, 2] путем исследования условий в бесконечно тонком слое на границе среды. Результаты (14) и (15) основаны на этих формулах. Таким образом, оказалось возможным получить данные о числе рассеяний при диффузии фотонов, не рассматривая вовсе процессов внутри среды.

В следующем номере настоящего журнала будет опубликована статья М. Тер-Микаеляна, где выведено значение n для различных случаев одномерной задачи рассеяния света. Автор ее участвовал и в обсуждении настоящей работы.

Бюраканская астрофизическая обсерватория

Академии наук Армянской ССР

Ереван, 1948, февраль

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Амбарцумян, ЖЭТФ, **13**, 324, 1943.
2. В. А. Амбарцумян, ЛАН СССР, **38**, 257, 1943.

МУТНАЯ СРЕДА С РАВНОМЕРНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ИСТОЧНИКОВ*

(Представлено 3.III 1948)

Новые методы теории рассеяния света в мутной среде, развитые нами [1, 2, 3], позволяют, между прочим, представить в изящной форме точное решение задачи о мутной среде, заполняющей полупространство и состоящей из плоскопараллельных слоев с равномерным распределением источников света.

Пусть σ есть коэффициент чистого рассеяния, а κ — коэффициент истинного поглощения, и пусть количество энергии, излучаемой источниками в единице объема, будет $4\pi\varepsilon(\sigma + \kappa)$, где ε постоянная в данной среде. Примем, что индикатриса рассеяния сферическая. Наконец, как обычно, ограничимся случаем, когда отношение

$$\lambda = \frac{\sigma}{\sigma + \kappa}$$

является постоянным.

Ищется интенсивность выходящего с границы среды света. Эта интенсивность $I_0(\eta)$ будет зависеть от η , т. е. от косинуса угла с внешней нормалью.

Воспользуемся принципом инвариантности $I_0(\eta)$ по отношению к добавлению некоторого слоя с линейной толщиной dz и оптической толщиной $d\tau = (\sigma + \kappa) dz$ поверх границы среды.

Согласно этому принципу инвариантности, полная интенсивность излучения, доходящего до наблюдателя, будет в данном случае равна сумме пяти величин: 1) излучение бесконечного слоя, лежащего под $d\tau$, ослабленное при прохождении через $d\tau$, 2) прямое излучение источников, находящихся в $d\tau$, 3) та часть излучения источников, расположенных в $d\tau$, которая диффузно отражается от находящейся под $d\tau$ бесконечной среды, 4) та часть излучения находящейся под

* ДАН АрмССР, 8, 149, 1948.

$d\tau$ бесконечной среды, которая рассеивается слоем $d\tau$ в сторону наблюдателя и 5) та часть излучения находящейся под $d\tau$ бесконечной среды, которая сначала рассеивается слоем $d\tau$ в сторону той же бесконечной среды и затем диффузно отражается от нее. Все другие члены будут порядка $d\tau^2$ и в пределе должны быть отброшены. Итак,

$$I_0(\eta) = I_0(\eta) \left(1 - \frac{d\tau}{\eta} \right) + \frac{\varepsilon d\tau}{\eta} + 2\varepsilon d\tau \int_0^1 r(\eta, \xi) \frac{d\xi}{\xi} + \frac{\lambda}{2} \frac{d\tau}{\eta} \int_0^1 I_0(\xi) d\xi + \lambda d\tau \int_0^1 I_0(\xi) d\xi \int_0^1 r(\eta, \xi) \frac{d\xi}{\xi}, \quad (1)$$

где, как показано было в упомянутых работах, функция отражения $r(\eta, \xi)$ имеет вид:

$$r(\eta, \xi) = \frac{\lambda}{4} \xi \frac{\varphi(\eta) \varphi(\xi)}{\eta + \xi}, \quad (2)$$

причем функция $\varphi(\eta)$ удовлетворяет функциональному уравнению:

$$\varphi(\eta) = 1 + \frac{\lambda}{2} \eta \varphi(\eta) \int_0^1 \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\eta + \xi}. \quad (3)$$

После сокращения получаем из (1):

$$\frac{1}{\eta} I_0(\eta) = \frac{\varepsilon}{\eta} + \frac{\lambda}{2\eta} \int_0^1 I_0(\xi) d\xi + 2\varepsilon \int_0^1 r(\eta, \xi) \frac{d\xi}{\xi} + \lambda \int_0^1 I_0(\xi) d\xi \int_0^1 r(\eta, \xi) \frac{d\xi}{\xi}.$$

Решение этого, неоднородного по отношению к $I_0(\eta)$ уравнения, очевидно, пропорционально ε . Поэтому представим его в виде:

$$I_0(\eta) = \varepsilon u(\eta), \quad (4)$$

где $u(\eta)$ зависит лишь от η и λ и не зависит от ε .

Получаем:

$$u(\eta) = \left(1 + \frac{\lambda}{2} \int_0^1 u(\xi) d\xi \right) \left\{ 1 + 2\eta \int_0^1 r(\eta, \xi) \frac{d\xi}{\xi} \right\}. \quad (5)$$

Подставляя (2) в (5), имеем:

$$u(\eta) = \left(1 + \frac{\lambda}{2} \int_0^1 u(\xi) d\xi \right) \left\{ 1 + \frac{\lambda}{2} \eta \varphi(\eta) \int_0^1 \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\eta + \xi} \right\}. \quad (6)$$

Первый множитель правой части постоянен. Обозначим его

$$B = 1 + \frac{\lambda}{2} \int_0^1 u(\xi) d\xi. \quad (7)$$

Деля (6) на (3), получаем тогда:

$$u(\tau) = B\varphi(\tau). \quad (8)$$

Из (7) и (8) находим также значение B :

$$B = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \varphi(\tau) d\tau} = \frac{1}{V1 - \lambda}. \quad (9)$$

как это следует из оценки $\int_0^1 \varphi(\tau) d\tau$, данной прежде [4]. Формула

(7) показывает, что в рассматриваемой задаче относительное распределение интенсивностей по направлениям определяется функцией $\varphi(\tau)$. Однако при $\lambda=1$ множитель B обращается в бесконечность, и задача не имеет решения, так как при отсутствии поглощения не может быть стационарного режима с повсюду положительными источниками, распределенными равномерно.

Бюраканская астрофизическая обсерватория
Академии наук Армянской ССР
Ереван, 1948, март.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. А. Амбарцумян, ДАН СССР, **38**, 257, 1943.
2. В. А. Амбарцумян, *Астрономический журнал*, **19**, 1942.
3. В. А. Амбарцумян, *ЖЕТФ*, **13**, 323, 1943.
4. В. А. Амбарцумян, ДАН Армянской ССР, **8**, № 3, 1948.

П р и м е ч а н и е. В настоящей статье показано, что при равномерном распределении источников (т. е. при $\varepsilon = \text{const}$) интенсивность выходящего из среды излучения $I(\tau)$ просто выражается через функцию $\varphi(\tau)$. В дальнейших исследованиях были получены формулы, выражающие $I(\tau)$ через $\psi(\tau)$ также в тех случаях, когда ε полином или экспоненциальная функция от τ .

ТЕОРИЯ МЕЖЗВЕЗДНОГО
ПОГЛОЩЕНИЯ СВЕТА

ПРОБЛЕМА ДИФFUЗНЫХ ТУМАННОСТЕЙ И КОСМИЧЕСКОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ*

Как известно, среди диффузных туманностей имеются туманности как с непрерывным спектром, так и со спектром, состоящим из эмиссионных линий. Было установлено, что свечение диффузной туманности связано в каждом случае с некоторой звездой высокой абсолютной яркости, расположенной или внутри туманности, или вблизи нее. Кроме того, было замечено, что, когда спектр освещающей звезды типа В1 или более поздний, спектр туманности оказывается непрерывным и совпадает со спектром звезды. В этом случае мы имеем дело с простым отражением света звезды туманностью и имеются все основания предполагать, что это диффузное отражение производится твердыми частицами космической пыли. Однако в случае, когда звезда, вызывающая излучение туманности, принадлежит типу О или В0, спектр оказывается эмиссионным. Как было показано Росселандом [1] и Занстра [2], это излучение обусловлено возбуждением, коротковолновым излучением звезды, атомов газов, содержащихся в туманности.

В любом случае каждая диффузная туманность связана с некоторой звездой, вызывающей это свечение. Однако истинный характер этой связи все еще не известен.

В действительности имеются две взаимно исключаящие друг друга возможности: 1) звезды, вызывающие свечение туманностей, при своем движении в пространстве приближаются к ним случайно. С этой точки зрения диффузная туманность в разные моменты может приближаться к звездам различных спектральных классов, дающих каждый раз соответствующий спектр отражения. Может также случиться, что в определенные периоды, когда в ее близости не оказывается ни одной достаточно яркой звезды, эта туманность совсем не будет светиться; 2) звезда, вызывающая свечение туманности, связа-

* Problem of Diffuse Nebulae and Cosmic Absorption. Бюлл. Абастуманской обл., 2, 37, 1938. Соавтор Ш. Г. Горделадзе. Перевод с английского.

на с ней динамически, т. е. они имеют общее происхождение и одинаковое движение в пространстве. Главной целью настоящего исследования является обсуждение проблемы о том, какая из этих двух возможностей более правдоподобна. Проблема разрешается следующим способом. При гипотезе случайной связи можно принимать, что процент туманностей из всех ярких туманностей, освещаемых звездами данного спектрального класса, пропорционален той доли объема межзвездного пространства, которая освещается звездами этого спектрального класса. Чем больший объем освещается общим количеством звезд данного спектрального типа, тем больше число туманностей в данный момент будет внутри этого объема и будет освещаться звездами этого типа. С другой стороны, доля пространства, освещаемая до определенной степени звездами данного спектрального класса, зависит от общего числа звезд этого класса и от их абсолютной яркости: чем более многочисленны эти звезды и чем выше их абсолютная яркость, тем больше доля пространства, освещаемая звездами рассматриваемого типа. Благодаря этому мы можем вычислить относительный и абсолютный объемы пространства, освещаемые звездами каждого спектрального типа, основываясь на функции светимости каждого типа, т. е., на данных звездной статистики. Число туманностей, освещаемых звездами различных типов, должно быть пропорционально относительным объемам, вычисленным вышеуказанным методом, если только гипотеза случайной связи верна.

Такое вычисление относительного объема освещаемого пространства было выполнено и дано ниже. Мы получили вполне удовлетворительное объяснение того факта, что большинство отражающих туманностей освещается звездами типа В (именно В0—В9).

Не имеется никакого основания думать, что гипотеза о динамической связи может помочь объяснить это распределение. В самом деле, почему звезды типа В1—В9, а не звезды, скажем, типа М должны быть главным образом связаны с пылевыми туманностями?

С другой стороны, существование „темных“ туманностей, естественное для гипотезы о случайной связи, побуждает нас предполагать, при допущении о динамической связи, что существует отдельный класс туманностей, который не связан с какими-либо звездами.

Прежде чем обратиться к вышеописанному методу проверки гипотезы о случайной связи, следует отметить, что возможны также другие методы контроля. Так, например, представляется интересным сравнить радиальные скорости звезд со скоростями освещаемых ими туманностей*. Эти радиальные скорости при условии отсутствия физи-

* Этот метод контроля был предложен ранее Хабблом в его статье о диффузных туманностях (Ар. Ж. **66**, 162, 1922).

ческой связи не должны коррелироваться между собой. Наблюдательный материал, взятый из каталога Мура и данный в табл. 1, показывает, что такая корреляция, вероятно, отсутствует.

Т а б л и ц а 1

Туманность	Радиальная скорость туманности	Радиальная скорость звезды
NGC 3976	+ 17.5 км/сек	+ 30.0 км/сек
3372	+ 6.0 "	- 25.0 "
6514	+ 11.0 "	+ 7.6 "
6523	- 3.0 "	+ 15.3 "
6618	+ 7.0 "	+ 14.0 "

Следует, однако, отметить, что этот довольно скудный материал не позволил прийти к какому-нибудь определенному выводу.

С другой стороны, вероятно, возможно и примирить эти данные с гипотезой о динамической связи. Так, на-

пример, Занстра [3] предполагает, что диффузные туманности (в этом случае — газовые туманности) не являются стационарными, и вещество постоянно истекает из них по направлению к звезде. Как раз это истекающее вещество является наиболее светлым. Поэтому, хотя основная масса туманности может иметь одинаковую со звездой радиальную скорость, между радиальной скоростью звезды и видимой радиальной скоростью туманности должно существовать различие. Поэтому статистический метод, основанный на вычислении для каждого спектрального типа общего объема освещаемого пространства, представляется наиболее надежным.

Проверка гипотезы о случайной связи. Само собой очевидно, что идея об освещаемом звездой объеме нуждается в более точном определении. Строго говоря, каждая звезда освещает бесконечный объем. На больших расстояниях, однако, освещение от звезды настолько незначительно, что освещаемая туманность не наблюдаема. Таким образом, для практических целей мы должны вокруг каждой звезды рассматривать такой объем, внутри которого освещение выше некоторого нижнего предела и которое может быть принято равным слабейшему освещению, доступному для регистрации нашими инструментами и пластинками. Удобно принять за такой нижний предел освещение, которое может быть зарегистрировано при часовой экспозиции с 60-дюймовым рефлектором Обсерватории Маунт Вилсон.

Предположим, что звезда имеет светимость I . Тогда количество энергии, падающей на 1 см^2 поверхности нормально к лучам звезды на расстоянии r , оказывается равным

$$\frac{I}{4\pi r^2}$$

Если мы примем, что поверхность отражает весь падающий на нее свет, то для количества энергии, получаемой единицей поверхно-

сти Земли от единицы отражающей поверхности туманности, мы получим:

$$\frac{I}{4\pi r^2 4\pi R^2}, \quad (1)$$

где R расстояние туманности от Земли. С другой стороны, квадратная секунда дуги* поверхности туманности, имеющей параллакс p в секундах дуги, соответствует в обычных единицах площади (в $см^2$) следующей величине:

$$\left(\frac{R_{\odot}}{p}\right)^2,$$

где R_{\odot} расстояние Солнца от Земли.

Для p имеем:

$$p = \frac{R_{\odot}}{R} 206\,000,$$

и, соответственно, для той же площади мы получим:

$$\left(\frac{R}{206\,000}\right)^2. \quad (2)$$

Взяв выражение (1) для количества энергии, получаемой 1 $см^2$ Земли от 1 $см^2$ поверхности туманности, и умножая на (2), которое дает число квадратных сантиметров на квадратную секунду поверхности туманности, мы получим энергию, получаемую 1 $см^2$ поверхности Земли от квадратной секунды поверхности туманности:

$$\frac{I}{4\pi r^2 4\pi} \left(\frac{1}{206\,000}\right)^2 = \frac{I}{(206\,000)^2 (4\pi r)^2}.$$

Теперь, обозначая видимую величину освещающей звезды через m_* , а звездную величину от квадратной секунды туманности через m_s , мы напишем:

$$m_* - m_s = -2,5 \log \left[\frac{I}{4\pi R^2} : \frac{I}{16\pi^2 r^2} \frac{1}{(206\,000)^2} \right] = -2,5 \log \frac{(206\,000)^2 4\pi r^2}{R^2},$$

или

$$m_* - m_s = -2,5 \log [4\pi r^2 (206\,000)^2] + 5 \log R.$$

* В формулах и тексте, начиная от этого места до формулы (4'), внесены поправки по сравнению с оригиналом, так как значение $m_{s(11m)} = 23,25$, приведенное далее в тексте, означало звездную величину не с одной квадратной минуты, как было написано в оригинале, а звездную величину с квадратной секунды дуги. Однако, как упоминается в другой работе автора (стр. 327), вычисления настоящей статьи были сделаны по правильной формуле. *Ред.*

Подставляя

$$M = m_s - 5 \log R + 5$$

для абсолютной величины (M) звезды, мы находим из предыдущего уравнения после простых преобразований

$$\log r = -0.5 \log 4\pi (206\,000)^2 + 0.2 (m_s - M) + 1.$$

Заменяя m_s предельной звездной величиной с квадратной секунды, доступной для регистрации при часовой экспозиции с 60-дюймовым рефлектором Обсерватории Маунт Вилсон, мы находим зависимость между абсолютной величиной освещающей звезды и расстоянием (r_0), при котором звезда дает это предельное освещение.

Можно принять, что $m_{s \text{ lim}} = 23.25$, поэтому

$$\log r_0 = -0.5 \log 4\pi (206\,000)^2 - 0.2 M + 5.65. \quad (3)$$

Очевидно, что объем освещаемого пространства равен $\frac{4}{3} \pi r_0^3$, так

как любая туманность, расположенная внутри этого объема, будет обладать поверхностной яркостью, доступной для нашего наблюдения.

Следовательно, для освещаемого объема мы находим, учитывая (3), выражение:

$$V(M) = C \cdot 10^{-0.6M}, \quad (4)$$

где

$$\log C = \log \frac{4}{3} \pi - 1.5 \log 4\pi (206\,000)^2 + 16.95, \quad (4')$$

откуда видна зависимость освещаемого объема от абсолютной величины звезды.

Пусть $\Phi(M)$ будет функцией светимости для рассматриваемого спектрального типа, т. е., $\Phi(M) dM$ представляет число звезд в единице объема, принадлежащих данному спектральному типу и с абсолютными величинами, заключенными между M и $M + dM$. Доля единицы объема, „освещаемая“ звездами данного спектрального типа, очевидно, будет представляться интегралом:

$$P = \int \Phi(M) V(M) dM. \quad (5)$$

При известной для данного спектрального класса функции $\Phi(M)$ и полученном виде функции $V(M)$ мы можем определить P для различных спектральных классов.

В вычислениях мы использовали таблицы функции $\Phi(M)$ Ван Райна и Швассманна [4]. Полученные величины P даются в табл. 2.

Необходимо упомянуть, что в процессе вычислений оказалось, что максимум функции $\Phi(M) V(M)$ для каждого спектрального клас-

Таблица 2

Спектральный тип	$P \times 10^4$	Спектральный тип	$P \times 10^4$
B	3,50	G	0,8
A	0,80	K	0,25
F	0,25	M	0,02

са попадает на сравнительно высокие абсолютные величины, именно на сверхгиганты этого класса. После максимума эта функция каждый раз очень медленно убывала с повышением абсолютной яр-

кости. Таким образом, величину функции $\Phi(M) V(M)$ в некоторых случаях надо было экстраполировать в области больших абсолютных яркостей за пределами таблицы Ван Райна и Швассманна. Очевидно эта экстраполяция вызвала некоторую неточность.

Величины P , данные в табл. 2, практически представляют долю межзвездного пространства, которая освещается звездами соответствующих спектральных классов. Суммируя все эти числа (к которым позже будут добавлены соответствующие числа для В0 и О), мы увидим, что звездами освещается только незначительная часть пространства. Поэтому число освещенных туманностей должно быть очень мало по сравнению с числом неосвещенных туманностей, если только гипотеза о случайной связи звезд и туманностей верна.

Прямое сравнение данных табл. 2 с относительными числами наблюдаемых туманностей осложняется из-за звезд типа В, связанных иногда как с эмиссионными, так и с отражающими туманностями. Кроме того, следует определить величину P для звезд типа О. Как известно, В0-звезды связаны с эмиссионными туманностями, в то время как В1—В9-звезды характерны для отражающих туманностей. Поэтому величины P мы определили отдельно для типов О и В0. Вычитывая величину P , вычисленную для подтипа В0 из величины P для В-типа в целом, мы, с другой стороны, получим величину P для спектральных подгрупп В1—В9.

Для определения величин P для О и В0-звезд необходимо знание функции $\Phi(M)$ для каждого из этих классов.

Не имея никаких данных о виде этих функций для действительных случаев, мы допустим, что они выражаются некоторым законом нормального распределения:

$$\Phi = A e^{-\frac{(M - M_0)^2}{2\sigma^2}}, \quad (6)$$

где M_0 — средняя абсолютная величина звезд данного типа, σ — дисперсия абсолютных величин, а A — некоторая постоянная, определяющая абсолютную концентрацию звезд данного типа в пространстве. Принимая такую функцию светимости для звезд рассматриваемого

класса, вычислим теперь число звезд, видимая величина которых выше некоторой звездной величины m_0 . Предполагая затем, что звезды обсуждаемого типа распределены в галактической плоскости равномерно (т. е. почти не имеют никакой дисперсии в направлении, перпендикулярном к плоскости Галактики), мы сначала рассмотрим случай, когда поглощение света отсутствует.

Тогда можно сказать, что все звезды с абсолютной величиной M , расположенные ближе чем $r = 10^{0.2(m_0 - M) + 1}$, будут иметь видимую яркость до m_0 . Поэтому объем пространства, в котором наблюдаются эти звезды, оказывается равным:

$$\pi r^2 h = \pi h 10^{0.4(m_0 - M) + 2},$$

поскольку этот объем может быть представлен цилиндром, основание которого параллельно плоскости Галактики и имеет радиус r , а высота равна некоторой величине h . Иными словами, h представляет толщину слоя звезд данного типа.

Число звезд абсолютной величины M , содержащихся в этом объеме и кажущихся ярче, чем m_0 , выразится через:

$$\pi r^2 h \Phi(M) = A \pi e^{-\frac{(M - M_0)^2}{2\sigma^2}} 10^{0.4(m_0 - M) + 2} h.$$

Интегрируя это произведение по всем абсолютным величинам, мы получаем общее число звезд рассматриваемого типа ярче видимой величины m_0 :

$$N(m_0) = A \pi h 10^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(M - M_0)^2}{2\sigma^2}} 10^{0.4(m_0 - M)} dM. \quad (7)$$

С другой стороны, аналогичные рассуждения приводят нас к выводу, что общее число всех звезд В0 — В9 типов с видимой яркостью больше m_0 представляется выражением:

$$N_{\text{В0 - В9}}(m_0) = \pi h 10^2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(M) 10^{0.4(m_0 - M)} dM, \quad (8)$$

где $\varphi(M)$ — функция светимости для всех В-звезд, которая была табулирована Ван Райном и Швассманном [4].

Предположим, что для рассматриваемого типа (В0 или О), так же как и для типа В в целом, величина h одинакова, т. е. дисперсии в направлении, перпендикулярном галактической плоскости, в обоих случаях совпадают. Тогда, разделив (7) на (8), мы получаем:

$$\frac{N(m_0)}{N_{\text{В0-В9}}(m_0)} = A \frac{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(M-M_0)^2}{2\sigma^2}} 10^{0,4(m_0-M)} dM}{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(M) 10^{0,4(m_0-M)} dM}.$$

Так как и в числителе и в знаменателе выражение $10^{0,4 m_0}$ выводится за знак интеграла, мы имеем:

$$\frac{N(m_0)}{N_{\text{В0-В9}}(m_0)} = A \frac{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(M-M_0)^2}{2\sigma^2}} 10^{-0,4 M} dM}{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(M) 10^{-0,4 M} dM}. \quad (9)$$

Интеграл в знаменателе правой части уравнения (9) может быть вычислен на основе данных Ван Райна и Швассманна; интеграл в числителе также может быть сосчитан, если известны M_0 и σ . Для последних величин мы использовали данные Пласкетта-Пирса [5], соответственно для О- и В0-типов. Они представлены ниже:

Сп. тип	M_0	σ
О	- 4,0	1,33
В0	- 3,4	1,28

Количества $N_{\text{В0-В9}}$ и $N(m_0)$ для О- и В0-типов можно вычислить, используя любой каталог звезд, включающий звезды до определенной видимой величины. Таким путем величина A может быть найдена для каждого из исследуемых спектральных типов (О и В0).

Все вышесказанное верно только в случае отсутствия межзвездного поглощения. Поглощение грубо может быть учтено следующим образом. Как мы предполагали выше, число звезд каждого спектрального типа пропорционально объему, внутри которого звезды данного типа имеют видимую величину больше m_0 . При наличии поглощения этот объем меньше, чем при его отсутствии, так как, например, звезды типа О, обладающие средней абсолютной яркостью $M = -4$ при $m_0 = 9,0$, наблюдаются без поглощения до $4 \cdot 10^3$ парсек, в то время как при поглощении $0^m 6$ на килопарсек они могут наблюдаться только до расстояния 2200 парсек. Таким способом возможно вычислить отношение объема, действительно покрываемого каталогом

HD, к объему, который был бы покрыт этим каталогом при абсолютной прозрачности пространства, рассматривая предельную величину для каталога HD, равную

$$m_0 = 9.0.$$

Такое вычисление было выполнено отдельно для В0- и О-типов, и были получены соответствующие поправочные множители. В каждом случае интеграл в числителе правой части уравнения (9) был умножен на этот множитель.

Мы использовали каталог HD. Как известно, число звезд В0—В9 типов в этом каталоге 16 786. С другой стороны, мы сосчитали число В0-звезд в том же каталоге. Оно оказалось равным 286, в то время как число звезд типа О со спектром поглощения, к которым мы отнесли все Ое- и Ое5-звезды, оказалось равным 53. На основе этих данных мы вычислили величину A для обоих исследуемых типов. Подставляя выражение (6) в формулу (5), мы получаем величины P для О- и В0-типов. Для величин P мы окончательно получаем следующую табл. 3.

Таблица 3

Спектральный тип	$P \times 10^4$	n	Спектральный тип	$P \times 10^4$	n
О	0,2	11	F	0,25	2
В0	0,6	7	G	0,18	1
В1—В9	2,9	54	K	0,25	2
A	0,8	5	M	0,02	0

В последнем столбце этой таблицы дается число туманностей, освещаемых звездами каждого спектрального класса согласно данным второй статьи Хаббла [6].

Из этой таблицы следует, что сумма P для О—В0-звезд равна $0.8 \cdot 10^{-4}$, в то время как для В1—М-звезд она равна $4.4 \cdot 10^{-4}$. Таким образом, с теоретической точки зрения число эмиссионных туманностей, связанных с О—В0-звездами, должно быть в $5^{1/2}$ раза меньше, чем число отражающих туманностей. Между тем в вышеупомянутом списке Хаббла число эмиссионных туманностей равно 18, а отражательных—64, т. е. это отношение меньше четырех. Вообще, табл. 3 показывает, что гипотеза о случайной связи дает достаточно правильное распределение отражающих туманностей по спектральным типам освещающих их звезд. В частности, эта гипотеза вполне хорошо объясняет преобладание В1—В9 спектров у отражающих туманностей. Кроме того, кажется поразительным, что туманности, освещаемые звездами типа М, почти всецело отсутствуют, что

также вполне согласуется с наблюдениями и что не могло ожидать-ся из теории при гипотезе о динамической связи.

В общем, следует считать, что гипотеза о случайной связи для отражающих туманностей полностью подтверждается. Что касается эмиссионных туманностей, то, вопреки указанному численному несогласию, они, вероятно, также случайно связаны с В0- и О-звездами, так как неопределенность в численных значениях P довольно значительная.

На первый взгляд может показаться странным, что мы пытаемся рассматривать эмиссионные и отражающие туманности как объекты существенно одинакового типа, дающие тот или иной спектр, согласно спектральному классу освещающей звезды. В самом деле, принято считать, что отражающие туманности состоят из малых твердых частиц (космической пыли), в то время как эмиссионные туманности состоят из газов. Если принять, однако, гипотезу случайной связи, то заключение об одинаковой природе обоих объектов станет неизбежным. Действительно, в противном случае было бы трудно объяснить полное отсутствие отражающих, т. е. пылевых туманностей, связанных с О- и В0-звездами. Но О- и В0-звезды также могут освещать облака космической пыли, присутствующие в пространстве. С другой стороны, мы знаем факты сосуществования для одной и той же туманности одновременно отражающего и эмиссионного спектров как раз в тех случаях, когда туманность связана с В1 звездой. Принимая, таким образом, гипотезу о единстве природы обоих типов туманностей, мы должны допустить, что туманность может дать как эмиссионный, так и отражательный спектр. Характер спектра будет зависеть от спектрального типа звезды, с которой туманность встретилась.

Вероятно, это происходит следующим образом. Горячие звезды типов О и В0, встречая пылевую туманность, вызывают интенсивное выделение газов из космической пыли и, возбуждая эти газы, заставляют их дать эмиссионный спектр. В этом отношении процесс подобен процессу, который имеет место при приближении кометы к Солнцу: твердые частицы, из которых состоит ядро кометы, выделяют газы, формирующие голову и хвост кометы и дающие эмиссионный спектр под влиянием излучения Солнца. На больших расстояниях от Солнца кометы не имеют хвоста и газовой оболочки и отражают непрерывный спектр Солнца.

Оценка общего числа туманностей. Слагая все данные второго столбца табл. 3, т. е. получая $\sum P$ для всех спектральных типов, мы будем иметь доказательство того, что все звезды в целом освещают только незначительную часть межзвездного пространства:

$$\Sigma P = 5.2 \times 10^{-4} .$$

Поскольку только одна двухтысячная часть всего межзвездного пространства освещается звездами и так как туманности в пространстве распределены случайно (независимо от звезд), то отношение числа ярких диффузных туманностей к числу темных диффузных туманностей соответственно равно 1:2000. Если вышеупомянутый инструмент регистрирует при часовой экспозиции 150 диффузных туманностей, то общее число таких туманностей, регистрируемых этим телескопом, должно быть порядка $3 \cdot 10^5$. Все 150 ярких туманностей должны быть расположены не дальше 2000 *парсек* от нас, так как на больших расстояниях космическое поглощение должно уменьшать их поверхностную яркость и сделать их ненаблюдаемыми. Следовательно, все 300 000 темных туманностей также расположены ближе 2000 *парсек*.

Отсюда легко вычислить нижний предел числа туманностей в кубическом парсеке. Рассматриваемые туманности должны быть расположены внутри цилиндра с радиусом основания в 2000 *парсек* и высотой, не превышающей 200 *парсек*.

Даже предполагая, что высота цилиндра больше, т. е. что туманности встречаются на расстояниях больше 100 *парсек* от галактической плоскости, все же для вычислений следует принять упомянутое значение 200 *парсек*, так как на расстояниях больше 100 *парсек* от галактической плоскости концентрация звезд, освещающих туманности (главным образом типа O и B), становится очень незначительной, и туманности, расположенные в этой области, не будут иметь какую-нибудь значительную возможность быть включенными в число 150 ярких объектов. Поэтому эти туманности не входят в полученное число 300 000 туманностей.

Предполагая, что указанные $3 \cdot 10^5$ туманностей распределяются внутри объема вышеупомянутого цилиндра, мы получаем одну туманность на 8000 *парсек*³. Если взять луч зрения в плоскости Галактики до расстояния l от нас, то число туманностей, пересекаемых этим лучом, будет:

$$n l \sigma,$$

где σ — поперечное сечение туманности, а n — число туманностей в 1 *парсек*³. Согласно вышеуказанному, $n = \frac{1}{8000}$. Взяв поперечное сечение равным 25 *парсек*² (что приблизительно согласуется с тем, что диаметры туманностей заключены между 1 и 20 *парсеками*), мы получили при $l = 1000$ *парсек* среднее число туманностей, пересекаемых лучом зрения, равным 3.

В действительности, однако, предельное расстояние в 2000 *парсек*, принятое выше, является, по-видимому, только верхним пределом. Некоторое уменьшение этого расстояния должно непосредственно привести к заметному росту числа туманностей, пересекаемых лучом зрения. Ниже мы рассмотрим проблему поглощения света этими неосвещаемыми туманностями.

Поглощение света диффузными туманностями. При выводе соотношения между видимой величиной освещающей звезды и ее угловым расстоянием от туманности Хаббл предполагал, что туманность отражает весь свет звезды или, по крайней мере, его заметную часть. Тот факт, что это теоретическое соотношение всецело подтверждается наблюдениями, говорит о справедливости вышеупомянутой начальной предпосылки, т. е. туманности действительно отражают заметную часть падающего на них света.

В любом случае они должны отражать более чем 10% света, испускаемого звездами, так как если бы отражалось только 10%, теоретическая и наблюдаемая корреляции должны были показать, в среднем, очень большие расхождения. Кажется, что в действительности средний процент отражаемого света едва ли может быть меньше 30. Такая способность туманности отражать 30% падающего света указывает, что свет звезд за туманностью становится слабее не менее чем на 30%, т. е. на $0^m 3$. Полагая, что, согласно вышеприведенному вычислению, на пути луча длиной 1000 *парсек* будет находиться в среднем 3 туманности, можно ожидать, что общее количество неосвещаемых туманностей даст в плоскости Галактики среднее поглощение не менее $0^m 9$ или приблизительно одну величину на килопарсек. Известно, что в пространстве существует общее космическое поглощение, доходящее до $0^m 6 - 0^m 7$ на килопарсек. Поэтому естественно допустить, что это общее космическое поглощение вызывается общим количеством неосвещаемых диффузных туманностей. Мы не должны смущаться тем, что величина, полученная для поглощения, производимого совокупностью диффузных туманностей, несколько превышает средний коэффициент космического поглощения, так как мы не знаем хорошо величину поперечного сечения τ , которая была использована для вычислений и, вероятно, взята слишком большой. Такая интерпретация общего космического поглощения, как вызванного полным количеством неосвещаемых туманностей, кажется особенно надежной, если принять в расчет неоднородное распределение и клочковатый характер общего поглощения, на которые уже раньше было обращено внимание.

Следует добавить, что нет сомнений в том, что различные туманности имеют различные оптические толщи. Среди неосвещаемых

туманностей существуют возможно такие, оптическая толщина которых превышает одну звездную величину. Благодаря интенсивному поглощению света звезд, лежащих за такими неосвещаемыми туманностями, последние нам представляются в виде „темных“ туманностей.

С этой точки зрения яркие и темные туманности являются представителями весьма обширного класса диффузных туманностей, подавляющее большинство которых не освещается. Каждая отдельная туманность также может вызывать некоторый избыток цвета у звезд, расположенных за ней. Г. Шайн [7] исследовал проблему CE звезд, содержащихся в диффузных туманностях, и пришел к выводу, что часть этих CE , именно $0^m 1$ вызвана самой диффузной туманностью, а остальная часть обусловлена средой между туманностью и нами. Если туманность вызывает такой величины CE ($0^m 1$) у звезды, содержащейся в ней, то CE звезд, находящихся за туманностью, должны быть не меньше. Поэтому следует считать, что каждая диффузная туманность может производить избирательное поглощение от $0^m 1$ до $0^m 2$. Следовательно, среднее избирательное поглощение на килопарсек будет превышать $0^m 3$, так как в пути луча должны встречаться в среднем 3 неосвещаемые туманности.

Ниже мы покажем, что большинство фактов, относящихся к космическому поглощению как общему, так и избирательному, подтверждает нашу точку зрения о том, что оба поглощения вызываются совокупностью отдельных неосвещаемых туманностей, а не материей, непрерывно разбросанной в пространстве.

Нерешенные проблемы космического поглощения. Многочисленные авторы указывали на значительные нерегулярности в пространственном распределении поглощающего вещества. Как известно, области со значительным избирательным поглощением часто расположены рядом (на расстоянии нескольких градусов по галактической долготе) с областями слабого избирательного поглощения. Основываясь на тех же доводах, можно предполагать, что неравномерное распределение яркости в Млечном Пути в значительной мере обусловлено неравномерным распределением поглощающей материи. При условии, что поглощающая темная материя распределена в Галактике таким образом, что ее плотность представляет медленно меняющуюся функцию координат, было бы невозможно объяснить вышеупомянутую неоднородность. Кроме того, результирующее поглощение выводится интегрированием вдоль луча зрения и, следовательно, должно представлять еще более гладкую функцию небесных координат. Одно это обстоятельство приводит к заключению, что распределенная в межзвездном пространстве поглощающая материя имеет нерегулярно разбросанные сгущения. Отсюда только один шаг прийти к допущению,

что материя почти целиком сконцентрирована в этих сгущениях в виде неосвещаемых туманностей.

С другой стороны, Г. Шайн [8] указал, что темные места в Млечном Пути не совпадают с областями наибольшего избирательного поглощения. Этот представляющий большой интерес факт совершенно неясен с точки зрения непрерывного распределения поглощающей материи. Избирательное и нейтральное поглощение вызывается соответственно частицами различных размеров. Общее поглощение образуется из двух составляющих: 1) нейтрального поглощения и 2) общего поглощения, связанного с избирательным поглощением. В местах, где присутствует избирательное поглощение, вторая составляющая является значительной. Поэтому, если распределения частиц малых и больших размеров независимы друг от друга или при условии существования положительной корреляции между обоими распределениями, в местах с большим избирательным поглощением должно быть заметным также общее поглощение. Следовательно, отсутствие корреляции между покраснением и поверхностной яркостью Млечного Пути с точки зрения непрерывного распределения материи ведет к искусственному предположению о том, что между распределением частиц больших и малых размеров имеется отрицательная корреляция, т. е., в областях пространства, где имеется много больших частиц, должно быть сравнительно малое число малых частиц и наоборот.

Между тем мы увидим, что рассматриваемый факт может быть объяснен совершенно естественным образом с нашей точки зрения о тождественности поглощающей среды с совокупностью диффузных туманностей, без какого-либо дополнительного предположения.

Космическое поглощение с точки зрения гипотезы о прерывистом распределении поглощающей материи. Предположим ради простоты, что каждая диффузная туманность поглощает определенную долю света (как мы видели, около 0^m3). Обозначим это поглощение в звездных величинах через k . Пусть среднее число туманностей, пересекаемых лучом зрения на определенном расстоянии r , будет равным n ; тогда, как известно, среднее квадратичное отклонение от среднего числа туманностей на пути луча будет \sqrt{n} . Таким образом, среднее поглощение на этом расстоянии в звездных величинах есть nk , а среднее квадратичное отклонение поглощения — \sqrt{nk} . Очевидно, чем больше расстояние, т. е. чем больше r , тем больше среднее квадратичное отклонение для поглощения, выраженное в звездных величинах n , следовательно, чем дальше расположен класс рассматриваемых объектов, тем больше флуктуаций в яркости этих объектов должны

вызвать изменения в величине космического поглощения. Мы видим, что флуктуации поглощения, выраженные в звездных величинах, т. е. в логарифмической шкале, возрастают с возрастанием расстояния. Это отличает флуктуации в яркости, вызванные изменением числа туманностей, от других флуктуаций, обсуждаемых в физике. Если, например, мы наблюдали бы однородно-освещенную яркую сферу сквозь совокупность темных туманностей, имеющих постоянную оптическую толщину k , то с возрастанием среднего числа туманностей на единицу пути света флуктуация наблюдаемой интенсивности света в различных направлениях должна была быть тем больше, чем больше среднее число туманностей на пути луча. Следовательно, контраст между темными и светлыми областями должен возрастать с возрастанием числа туманностей.

Как раз благодаря этому обстоятельству, нерегулярности в общем и избирательном поглощении не могут убывать, а, наоборот, должны возрастать с ростом расстояния от рассматриваемых объектов. Нам представляется желательным проверить численную величину флуктуаций, получаемую из теории, и ее рост с расстоянием.

Однако такая проверка не так легко осуществима, как может показаться сперва. Так, например, если мы рассматриваем SE -звезд определенной подгруппы типа В, например ВЗ, имеющих одинаковую видимую яркость, то разница возникает не только благодаря флуктуациям в поглощении, но также и вследствие того, что эти звезды обладают определенной дисперсией абсолютных величин. Этим фактом обусловлено, что их расстояния также показывают значительную дисперсию*.

Обычно коэффициент избирательного поглощения определяется из цветов звезд ранних типов. В таком случае расстояние выводится из предположения, что данная звезда имеет абсолютную величину, равную средней абсолютной величине для соответствующей спектральной подгруппы. В действительности абсолютная величина может отклоняться от средней величины, и поэтому расстояние, определяемое этим способом, не будет точным. Благодаря этому возникает определенная дисперсия для величины коэффициента избирательного поглощения, определяемого этим способом. Можно легко усмотреть, что эта дисперсия возрастает пропорционально расстоянию и фактически во всех случаях превышает истинную дисперсию избирательного поглощения, рассмотренную выше. Поэтому определение величины истинной дисперсии коэффициента избирательного поглощения представляет большие трудности. Чтобы избежать этих трудностей, по-видимому,

* Очевидно авторы здесь имеют в виду то обстоятельство, что дисперсия расстояний в свою очередь увеличивает дисперсию в числе облаков. *Ред.*

желательно рассматривать объекты, для которых известно, что они расположены на одинаковом расстоянии от нас.

Кажется, что среди далеких объектов таковыми являются прежде всего двойные и кратные звездные скопления. Нет сомнения, например, что скопления χ и h Персея находятся на одинаковом расстоянии от нас. Поэтому интересно выяснить, существует ли избыток цвета для одного из этих скоплений относительно другого. Для решения этого вопроса следует образовать разность избытков цвета для звезд обоих скоплений, принадлежащих одинаковому спектральному классу.

Так, например, взяв цветовые эквиваленты (величины спектрофотометрических градиентов) согласно Торндайку [9], мы сравнили CE одиннадцати звезд в скоплении h Персея и десяти звезд в скоплении χ Персея, причем все использованные звезды принадлежат типам от $B0$ до $A0$. В итоге оказалось, что скопление χ Персея имеет отрицательный цветовой эквивалент примерно 0.24 ± 0.07 относительно скопления h Персея. Этот результат, хотя и основан на скудном материале, указывает на наличие большой флуктуации в избирательном поглощении при переходе от одного скопления к другому.

Проблема корреляции между избирательным поглощением и поверхностной яркостью Млечного Пути. Как было упомянуто выше, точка зрения о непрерывном распределении поглощающей материи не в состоянии объяснить отсутствие корреляции между величиной избирательного поглощения в данном направлении и поверхностной яркостью Млечного Пути. Однако, с точки зрения прерывистой структуры темной материи, это явление может найти свое объяснение. Дело в том, что, как было показано Крейкеном, значительные изменения поверхностной яркости Млечного Пути могут вызываться только той темной материей, которая находится на расстоянии не больше 200 парсек . Поэтому с нашей точки зрения распределение поверхностной яркости главным образом определяется неосвещаемыми туманностями, расположенными на расстояниях менее чем 200 парсек от нас. С другой стороны, избирательное поглощение было изучено, главным образом, на основе работы Стеббинса и Уитфорда [10] по звездам типа B , расположенным в среднем на расстоянии $500\text{--}600 \text{ парсек}$. Следовательно, картина распределения коэффициента избирательного поглощения, как она дается этой работой, связана с распределением неосвещаемых туманностей, расположенных на расстояниях вплоть до 500 парсек и больше. Таким образом, картина распределения поверхностей яркости Млечного Пути, с одной стороны, и распределение коэффициента избирательного поглощения, с другой, обусловлены двумя различными группами туманностей. Правда, одна из них составляет

часть другой группы, однако очевидно, что флуктуации числа туманностей в одной группе в некотором направлении будут почти независимы от флуктуаций числа туманностей в том же направлении в другой группе. Поэтому не должно существовать почти никакой корреляции между поверхностной яркостью Млечного Пути и коэффициентом избирательного поглощения, что как раз наблюдается в действительности.

Заключение. Как мы показали в настоящей статье, диффузные туманности динамически не связаны с освещающими их звездами и, вероятно, случайно встретились с последними в пространстве. Это ведет к выводу о том, что существует множество неосвещаемых диффузных туманностей, распределенных случайно в галактическом пространстве.

Вычисления показали, что поглощение света далеких звезд, производимое этими туманностями, должно быть одинакового порядка с наблюдаемым общим поглощением. Поэтому причина общего поглощения может быть заключена именно в этих неосвещаемых туманностях. Это предположение позволяет объяснить большие флуктуации в общем и избирательном поглощении при переходе от одной области неба к соседней. В дополнение мы показали, что с нашей точки зрения не следует ожидать какой-нибудь корреляции между поверхностной яркостью различных областей в Млечном Пути и коэффициентом избирательного поглощения в этих областях.

С этой точки зрения отражающие эмиссионные, так же как и „темные“ туманности, являются отдельными представителями однородного класса диффузных туманностей.

Диффузные туманности, обладающие большой оптической толщиной и неосвещаемые яркими звездами, будут видны как „темные“. Диффузные туманности, освещенные звездами типов В1—М, просто отражают их свет и, наконец, диффузные туманности, попадающие в поле излучения О- и В0-звезд, дают эмиссионный спектр, будучи существенно одинаковой физической природы с отражающими туманностями. Различие между отражающими и эмиссионными туманностями подобно различию между кометами, расположенными на больших и малых расстояниях от Солнца.

С другой стороны, предположение о наличии особой, непрерывно распределенной поглощающей среды в Галактике оказывается излишним.

Наконец, предложенная точка зрения наиболее простая, так как она охватывает все явления, относящиеся к туманностям с непрерывным эмиссионным и смешанным спектрами, к темным туманностям, так же как и к избирательному и общему космическому поглощению.

Сентябрь, 1937

ЛИТЕРАТУРА

1. Ap. J., **63**, 218, 1926.
2. Ap. J., **65**, 50, 1927.
3. MN, **97**, 37, 1936.
4. Z. f. Ap., **10**, 161, 1935.
5. Publ. Obs. Victoria, **5**, 4, 1935.
6. Ap. J., **56**, 400, 1922.
7. Z. f. Ap. **8**, 168, 1934.
8. Астр. журн., **14**, 293, 1937.
9. Н. С., 416, 1936.
10. Publ. Wash. obs., **15**, 5, 1934.

Примечание. Предположение об отсутствии генетической связи между туманностями и освещающими их звездами находится в случае эмиссионных туманностей и звезд O — B0 в противоречии с современными представлениями об O-ассоциациях, куда наряду с горячими звездами входят и эмиссионные туманности. В своих работах, посвященных ассоциациям, В. А. Амбарцумян стал на точку зрения совместного возникновения горячих звезд и газовых туманностей, входящих в одну ассоциацию.

Следует считать устаревшим также развиваемое в статье представление об образовании газовой составляющей туманности только из пылевой под воздействием горячей звезды.

ФЛУКТУАЦИИ В ЧИСЛЕ ВНЕГАЛАКТИЧЕСКИХ ТУМАННОСТЕЙ И ГАЛАКТИЧЕСКОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ*

Первые же исследования по космическому поглощению показали, что поглощающий слой в нашей Галактике имеет довольно сложную и неправильную структуру.

Исходя из данных, относящихся к статистике диффузных туманностей, автор совместно с Горделадзе [1] пришли к заключению, что связь между диффузными туманностями и освещающими их звездами носит характер случайной встречи и что существует огромное число „неосвещенных“ туманностей, которые должны производить поглощение. Было показано, что совокупность неосвещенных туманностей может дать космическое поглощение в среднем порядка одной величины на килопарсек и что, следовательно, полностью или почти полностью общее поглощение может быть объяснено действием этих неосвещенных туманностей. Поглощение каждой из неосвещенных туманностей было предварительно оценено примерно в 0,3 фотографической величины, но никакой проверки правильности этой оценки не было сделано.

Greenstein, исходя из других соображений, пришел независимо к гипотезе о том, что общее космическое поглощение обусловлено совокупностью отдельных облаков [2]. Однако, согласно его оценке, средняя оптическая толщина каждого облака порядка $0^m 11$. Впоследствии вопрос этот был рассмотрен Kreiken'ом [3] в связи с существованием „галактических окон“, причем оптическая толщина каждого облака принималась порядка 1^m и больше. Заметим, что и Becker, исследуя селективное поглощение в некоторых направлениях, счел необходимым приписать его отдельным облакам, расположенным на различных расстояниях от нас [4]. При этом для колор-экссесса от одного облака получались величины от $0^m 1$ до $0^m 3$. До сих пор обычно принималось, что в среднем фотографическое погло-

* Бюлл. Абастуманской obs., 4, 17, 1940.

шение примерно вдвое превосходит колор-эксцесс. Поэтому эти цифры можно было бы считать указанием на то, что оптическая толщина каждого облака в фотографических лучах заключена между $0^m.2$ и $0^m.6$. Однако в своем новом исследовании Oort [5] привел ряд серьезных доводов в пользу того, что отношение фотографического поглощения к селективному порядка 5, откуда следует, что результаты Becker'a приводят к оптической толщине каждой туманности порядка $0^m.5-2^m.0$.

Это разнообразие в оценке средней оптической толщины темных облаков, производящих межзвездное поглощение, указывает на необходимость решения этого вопроса с помощью какого-нибудь нового метода. Таким методом в известной степени может явиться анализ подсчетов внегалактических туманностей. Известно, что флуктуации в числе внегалактических туманностей, полученные на основании работы Hubble'a [6], не могут быть объяснены случайными колебаниями [7]. Поэтому остаются две гипотезы для объяснения большой величины этих флуктуаций: 1) влияние скоплений галактик [8] и 2) влияние флуктуаций в галактическом поглощении.

Нам кажется, однако, что скопления типа Virgo Cluster, влияя сильно на распределение *ярких* галактик, не могут сказаться сильно на флуктуациях в распределении слабых галактик, которые в основном входят в подсчеты Hubble'a.

Дело в том, что чем более слабые галактики мы берем, тем больше отношение охватываемого нашим исследованием расстояния к линейному диаметру среднего скопления галактик.

Поэтому, несмотря на меньшую плотность общего поля галактик, начиная с некоторого момента, число галактик общего поля, видимых в направлении данного скопления, во много раз будет превосходить число членов скопления. Правда, можно возразить, что число самих скоплений галактик может быть настолько велико, что луч зрения проходит на больших расстояниях, охватываемых исследованием Hubble'a, не одно, а большое число скоплений галактик. Но тогда очевидно, что сама множественность этих скоплений должна послужить причиной уменьшения флуктуаций в числе галактик.

В § 1 настоящей заметки мы покажем, что основной причиной больших флуктуаций в видимой плотности числа внегалактических туманностей являются флуктуации в галактическом поглощении. В § 2 мы выведем из флуктуаций чисел внегалактических туманностей среднюю оптическую толщину одного поглощающего облака, производящего общее галактическое поглощение.

Для исключения эффекта галактической широты, т. е. *среднего* поглощения на данной параллели, мы будем при этом заниматься

флуктуациями чисел галактик на одной и той же галактической параллели, тем самым освобождаясь от необходимости учета эффекта широты и умножения всех чисел на множители большие единицы.

§ 1. Как известно, при Гауссовском распределении отклонений между средним логарифмом числа туманностей и логарифмом среднего числа \overline{N} , имеет место соотношение [9]:

$$\log \overline{N} = \overline{\log N} + 1.152 \sigma^2,$$

где σ — дисперсия величины $\log N$.

Таким образом, разность $\log \overline{N} - \overline{\log N}$ характеризует дисперсию. Мы вычисляли эту разность для ряда галактических параллелей, используя для этой цели площадки, называемые Hubble'ом *Survey Fields*. Результаты приведены в табл. 1. В ней β означает галактическую широту, а n — число площадок на данной галактической параллели. Мы видим, что разность $\log \overline{N} - \overline{\log N}$, а следовательно, и дисперсия сильно возрастают по мере уменьшения галактической широты.

Таблица 1

β	n	$\log \overline{N} - \overline{\log N}$	Среднее
+70°	18	+0.033	+0.027
+60	36	32	
+55	35*	21	
+50	36	21	
+45	36	+0.028	+0.037
-45	20	38	
+40	36	37	
-40	21	44	
+35	36	+0.076	+0.065
-35	21	70	
+30	33	69	
-30	23	43	
+25	31	69	
-25	21**	60	

* Одна площадка ($\lambda = 10^\circ$; $\beta = +55^\circ$), содержащая скопление галактик, опущена.

** Одна площадка, не содержащая ни одной внешней галактики, опущена.

Это является весьма убедительным аргументом в пользу того, что причина флуктуаций лежит в основном в нашей галактике, а не в тенденции галактик к скупиванию или в ошибках подсчетов.

Мы приходим неминуемо к выводу, что флуктуации в $\log N$

обусловлены, главным образом, колебаниями в галактическом поглощении на данной галактической параллели.

Правда, небольшой источник возрастания дисперсии $\log N$ должен заключаться в том, что, вследствие возрастания среднего поглощения при уменьшении галактической широты, убывает само среднее значение $\log N$. Поэтому относительная величина флуктуаций, т. е. $\frac{\Delta N}{N}$ или $\overline{\Delta \log N}$ (или σ), возрастает. Но, как показывает вычисление,

это должно было бы обусловить возрастание разности $\log \overline{N} - \overline{\log N}$ при переходе от зоны $50 - 70^\circ$ к зоне $25 - 35^\circ$ в лучшем случае только в 1.4 раза, а не в 2.5 раза, как наблюдается на самом деле. Кроме того, при случайном характере флуктуаций сами разности должны были бы быть гораздо меньше.

§ 2. Обозначим через s среднее поперечное сечение каждой неосвещенной поглощающей туманности в нашей Галактике, через $\nu(z)$ — концентрацию этих неосвещенных туманностей в единице объема на расстоянии z от галактической плоскости. Пусть далее τ будет средняя оптическая толщина каждой темной туманности, выраженная в звездных величинах. Тогда среднее поглощение в направлении вблизи полюса галактики будет:

$$\overline{\Delta m(90^\circ)} = \tau s \int_0^\infty \nu(z) dz = \bar{k}\tau,$$

где величина

$$\bar{k} = s \int_0^\infty \nu(z) dz$$

представляет среднее число туманностей на пути луча. В общем случае на галактической широте β будем иметь среднее поглощение

$$\overline{\Delta m(\beta)} = \bar{k}\tau \sec \beta.$$

Реальное поглощение на параллели β в различных долготах, вследствие флуктуаций числа темных туманностей, будет колебаться около этой величины. Обозначим его через

$$\Delta m(\beta) = k(\beta)\tau,$$

где $k(\beta)$ — реальное (а не среднее) число неосвещенных туманностей на пути луча.

При наличии поглощения Δm число внегалактических туманностей до 20^m (предел Hubble'a) на 1 квадратный градус, если пренебречь

статистическими флуктуациями самих внегалактических туманностей, будет выражаться формулой

$$\log N = \log N_0 - 0.6 \Delta m.$$

Усредняя по всем долготам, получаем для данной широты:

$$\overline{\log N} = \log N_0 - 0.6 \overline{\Delta m} (\beta). \quad (1)$$

Таким образом, $\overline{\log N}$ зависит только от среднего поглощения и в него не входит оптическая толщина каждой поглощающей туманности в отдельности.

Вычислим теперь, чему должен быть равен $\log \bar{N}$. Мы имеем:

$$\bar{N} = \sum p(k) N_0 \cdot 10^{-0.6k\tau},$$

где $p(k)$ есть вероятность того, что на пути луча в данном направлении встречается k поглощающих туманностей.

По формуле Poisson'a имеем:

$$p(k) = \frac{(\bar{k})^k e^{-\bar{k}}}{k!},$$

где \bar{k} , по-прежнему, — среднее значение числа темных облаков на пути луча. Поэтому

$$\bar{N} = e^{-\bar{k}} N_0 \sum_k \frac{(\bar{k})^k}{k!} 10^{-0.6k\tau}.$$

Производя суммирование, получаем:

$$\bar{N} = N_0 e^{-\bar{k}} e^{\bar{k} \cdot 10^{-0.6\tau}}$$

или

$$\log \bar{N} = \log N_0 - \bar{k} \log e + \bar{k} 10^{-0.6\tau} \log e. \quad (2)$$

Считая, что τ меньше единицы, мы можем приближенно написать разложение

$$10^{-0.6\tau} = 1 - \frac{0.6}{\log e} \tau + \frac{0.18}{(\log e)^2} \tau^2 - \dots \quad (3)$$

Подставляя его в (2), находим с точностью до величины второго порядка по отношению к τ :

$$\log \bar{N} = \log N_0 - 0.6 \bar{k} \tau + \frac{0.18}{\log e} \bar{k} \tau^2.$$

С другой стороны, формулу для $\overline{\log N}$ мы можем переписать в виде:

$$\overline{\log N} = \log N_0 - 0.6 \bar{k} \tau,$$

так как

$$\overline{\Delta m} = \bar{k}\tau.$$

В результате для искомой разности мы имеем:

$$\log \overline{N} - \overline{\log N} = \frac{0.18}{\log e} \bar{k}\tau^2 = \frac{0.18}{\log e} \overline{\Delta m}\tau.$$

Для $\overline{\Delta m}$ мы имеем из изучения изменения $\overline{\log N}$ с β выражение

$$\overline{\Delta m} = 0.25 \operatorname{cosec} \beta. \quad (4)$$

Поэтому окончательно

$$\log \overline{N} - \overline{\log N} = 0.105 \tau \operatorname{cosec} \beta. \quad (5)$$

Таким образом, разность $\log \overline{N} - \overline{\log N}$ определяется средней оптической толщиной τ каждого отдельного поглощающего облака.

Мы видим, кроме того, что эта разность должна возрастать при приближении к галактическому экватору.

Определяя из наблюдений разность $\log \overline{N} - \overline{\log N}$ для разных галактических параллелей, мы можем, на основании формулы (5), определить τ .

Результаты определения величины τ по площадкам, расположенным на разных галактических параллелях, даются в табл. 2.

Таблица 2

β	n	τ
-25°	21	0 ^m .24
+25	31	.28
-30	23	.20
+30	33	.33
-35	21	.38
+35	36	.41
-40	21	.27
+40	36	.23
-45	20	.26
+45	36	.19

Среднее = 0.274

В среднем получаем из разных определений

$$\tau = 0^m.274.$$

Полученное число хорошо сходится со значением, полученным нами прежде [10]. Однако нужно заметить, что окончательное значе-

ние зависит от того, что мы в формуле (4) приняли, согласно Hubble'у, среднее поглощение в направлении галактического полюса порядка $0^m 25$. Если, согласно Minner'у [11], принять меньшее значение для коэффициента при $\cos \beta$ в (4), то значение τ увеличится.

Наконец, следует принять во внимание, что полученное значение τ характеризует лишь *среднюю* оптическую толщину неосвещенных туманностей. Что же касается отдельных конкретных туманностей, то оптическая толщина их может отличаться от средней цифры, по-видимому, довольно сильно.

Август, 1939.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Bull. Abast. Obs., 2, p. 37, 1938.
2. H. A., 105, p. 359, 1939.
3. Z. f. Ap., 17, p. 170, 1939.
4. Z. f. Ap., 17, p. 285, 1939.
5. Bull. Astr. Inst, Netherlands., 8, p. 245, 1938.
6. Mt. Wils. Contr., 485, 1934.
7. H. B., 895, 1934.
8. P. A. S. P. 50, p. 275, 1938.
9. Hubble, The Realm of the Nebulae, p. 75, 1937.
10. Bull. Abast. Obs., 2, p. 37, 1938.
11. Ann. d'Astroph. 1, p. 32, 1938.

К ТЕОРИИ ФЛУКТУАЦИЙ ЯРКОСТИ В МЛЕЧНОМ ПУТИ*

В настоящее время можно считать установленным, что поглощающая материя в нашей Галактике имеет клочковатую структуру, т. е. состоит из совокупности отдельных поглощающих облаков, интегральное действие которых и вызывает общее космическое поглощение. Те из близких к нам поглощающих облаков, которые обладают большой поглощательной способностью, наблюдаются в виде так называемых темных туманностей. Излучению отдельных темных туманностей посвящена огромная литература. Однако статистическое излучение всей совокупности поглощающих облаков, обладающих в некоторых случаях небольшой поглощающей способностью, представляет также чрезвычайно интересную задачу.

В одной из предыдущих работ [1] автор показал, что флуктуации в наблюдаемом числе внегалактических туманностей (Hubble) вызываются клочковатостью поглощающей материи в нашей Галактике и вывел из этих флуктуаций некоторое среднее значение оптической толщины каждого облака. Оно получилось равным $0^m 27$.

Можно принять как рабочую гипотезу, что и флуктуации в видимом распределении яркости вдоль Млечного Пути также вызываются поглощающими облаками. По-видимому, такое утверждение можно считать первым приближением к истинному положению дел. Встает вопрос о законе распределения яркостей при таком происхождении упомянутых флуктуаций. Мы даем ниже вывод дифференциального уравнения, которому удовлетворяет функция распределения яркостей, из которого легко получаются соответствующие моменты (математические ожидания) всех порядков.

1. Будем считать, что вся экваториальная плоскость Галактики с равномерной плотностью заполнена до бесконечности звездами и поглощающими облаками. Это условное допущение в данном случае не является абсурдным, так как на больших расстояниях поглощение настолько велико, что находящиеся там звезды и темные облака

* ДАН СССР, **44**, 244, 1944.

практически не влияют на наблюдаемые яркости. При этом мы сначала предположим, что при прохождении света звезд через какое-нибудь облако всегда поглощается одна и та же доля света $1 - q$, так что прозрачность равна q .

Если число облаков, расположенных в каком-нибудь направлении до расстояния s от нас, обозначим через $n(s)$ (эта функция, очевидно, принимает случайные значения), то свет от звезды, находящейся на этом расстоянии, ослабнет в $q^{n(s)}$ раз. Следовательно, если элемент объема dV галактического пространства излучает в единице телесного угла энергию ηdV (речь идет о суммарном излучении звезд, расположенных в этом элементе), то полная яркость в каком-нибудь направлении в плоскости галактического экватора будет равна

$$\int_0^{\infty} q^{n(s)} \eta ds.$$

Речь идет о вычислении вероятностей различных значений этого интеграла. Обозначим через $f(I)$ вероятность того, что этот интеграл больше I :

$$f(I) = p \left(\int_0^{\infty} q^{n(s)} \eta ds > I \right).$$

Тогда, очевидно,

$$f(I) = p \left(\int_0^a q^{n(s)} \eta ds + q^{n(a)} \int_a^{\infty} q^{n(s) - n(a)} \eta ds > I \right), \quad (1)$$

где мы ввели некоторую малую положительную величину a .

Если a мало, то $n(a)$ может принять либо значение $n(a) = 0$, либо $n(a) = 1$. Вероятность первого из этих значений будет равна $1 - \nu a$, а вероятность второго νa . Здесь ν есть среднее число облаков, приходящееся на единицу пути луча. Вероятности других значений $n(a)$ будут порядка высших степеней a и мы будем ими пренебрегать. Соответственно этому $\int_0^a q^{n(s)} \eta ds$ может принять либо значение ηa , либо значение $\eta \theta a$, где $0 < \theta < 1$. Поэтому

$$f(I) = (1 - \nu a) p \left(\int_a^{\infty} q^{n(s) - n(a)} \eta ds > I - a\eta \right) + \nu a p \left(\int_0^{\infty} q^{n(s) - n(a)} \eta ds > \frac{I - \eta \theta a}{q} \right). \quad (2)$$

Но в силу того, что распределение поглощающих облаков в пространстве равномерное,

$$p \left(\int_a^{\infty} q^{n(s) - n(a)} \eta ds > I \right) = p \left(\int_0^{\infty} q^{n(s)} \eta ds > I \right),$$

вследствие чего уравнение (2) переписется в виде:

$$f(I) = (1 - \nu a) f(I - a\eta) + \nu a f \left(\frac{I - \eta \theta a}{q} \right) \quad (3)$$

или, поскольку мы пренебрегаем членами второго порядка относительно a ,

$$f(I) = f(I) - \nu a f'(I) - a\eta f'(I) + \nu a f \left(\frac{I}{q} \right),$$

откуда

$$f(I) + \frac{\eta}{\nu} f'(I) = f \left(\frac{I}{q} \right). \quad (4)$$

Если введем новую переменную $u = I \frac{\nu}{\eta}$, то это уравнение примет форму:

$$f(u) + f'(u) = f \left(\frac{u}{q} \right). \quad (5)$$

Обозначим плотность вероятности $f'(u) = g(u)$. Для нее получаем путем дифференцирования (5) уравнение

$$g(u) + g'(u) = \frac{1}{q} g \left(\frac{u}{q} \right). \quad (6)$$

Из этого функционального уравнения нетрудно получить математическое ожидание самой яркости u , ее квадрата и т. д.

Для этого сперва убедимся из (5), что при $u = 0$ имеем:

$$f'(0) = g(0) = 0.$$

Теперь помножим (6) на u и проинтегрируем по всей области $(0, \infty)$

$$\bar{u} + \int_0^{\infty} g'(u) u du = q\bar{u},$$

где черта означает среднее значение. Отсюда, интегрируя по частям и пользуясь условием нормировки

$$\int_0^{\infty} g(u) du = 1,$$

находим

$$\bar{u} = \frac{1}{1-q}. \quad (7)$$

Точно так же найдем, помножая (6) на u^2 и интегрируя,

$$\overline{u^2} (1-q^2) = - \int_0^{\infty} g'(u) u^2 du = 2\bar{u},$$

откуда

$$\overline{u^2} = \frac{2\bar{u}}{1-q^2} = \frac{1}{(1-q)^2(1+q)}.$$

Для относительного среднего квадратичного отклонения получаем:

$$\frac{\overline{(u-\bar{u})^2}}{\bar{u}^2} = \frac{\overline{u^2}}{\bar{u}^2} - 1 = \frac{1-q}{1+q}. \quad (8)$$

Мы видим, что относительное значение среднего квадратичного отклонения целиком определяется значением прозрачности q одного облака.

2. Теперь откажемся от допущения, что все поглощающие облака имеют одинаковую оптическую толщину. Пусть они имеют разные оптические толщины, но при этом будем принимать, что при переходе от одной области пространства к другой распределение облаков по оптическим толщинам не меняется. Пусть вероятность того, что при прохождении луча через облако прозрачность последнего окажется заключенной между q и $q + dq$, равна $d\varphi(q)$. Тогда мы можем опять вывести функциональное уравнение для функции распределения яркостей:

$$f(u) + f'(u) = \int_0^1 f(u/q) d\varphi(q). \quad (9)$$

Отсюда можно перейти к плотности вероятности $g(u)$

$$+ g'(u) = \int_0^1 g\left(\frac{u}{q}\right) \frac{d\varphi(q)}{q}. \quad (10)$$

Для математических ожиданий u и \bar{u}^2 имеем:

$$\bar{u} = \frac{1}{1 - \int_0^1 q d\varphi(q)}; \quad \bar{u}^2 = \frac{2\bar{u}}{1 - \int_0^1 q^2 d\varphi(q)}. \quad (11)$$

Таким образом, если мы образуем средние

$$\bar{q} = \int_0^1 q d\varphi(q); \quad \bar{q}^2 = \int_0^1 q^2 d\varphi(q), \quad (12)$$

то

$$\bar{u} = \frac{1}{1 - \bar{q}}; \quad \bar{u}^2 = \frac{2\bar{u}}{1 - \bar{q}^2} > \frac{2\bar{u}}{1 - \bar{q}^2},$$

так как

$$\bar{q}^2 > \bar{q}^2.$$

Поэтому относительное среднее квадратичное отклонение

$$\frac{\bar{u}^2 - \bar{u}^2}{\bar{u}^2} = \frac{\int_0^1 (1 - q)^2 d\varphi(q)}{\int_0^1 (1 - q^2) d\varphi(q)}$$

оказывается большим, чем то, которое было бы при облаках с одним и тем же q , равным \bar{q} .

Для ряда законов распределения $\varphi(q)$ прозрачностей поглощающих облаков уравнение (10) для плотности вероятности допускает решение в виде определенного интеграла. Так, если $\varphi(q) = q$, т. е. если все прозрачности равновероятны,

$$g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut} \frac{dt}{(1 + it)^2}. \quad (13)$$

Если $\varphi(q) = q^2$, т. е. когда $\bar{q} = 2/3$ (что ближе к действительному положению вещей),

$$g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut} \frac{dt}{(1 + it)^3}. \quad (14)$$

Полученные результаты связывают флуктуации яркости Млечного Пути с характеристиками совокупности поглощающих облаков.

Астрономическая обсерватория
Академии наук Армянской ССР, Ереван

Поступило
11.III 1944

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. А. Амбарцумян, Бюллетень Абастуманской астрофизической обсерватории, **4**, 17 (1940).

Примечание. Легко убедиться, что при $\varphi(q) = q^k$ решение уравнения (10) имеет вид:

$$g(u) = u^k e^{-u}.$$

К ВОПРОСУ О ФЛУКТУАЦИЯХ ЯРКОСТИ МЛЕЧНОГО ПУТИ*

(Представлено 20.IV 1944)

В предыдущих заметках [1] автором была выдвинута и рассмотрена гипотеза о том, что флуктуации яркости вдоль Млечного Пути вызываются клочковатой структурой поглощающего слоя в Галактике [2]. Было получено дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция распределения яркостей, из которого были легко получены моменты (математические ожидания) разных порядков. При этом предполагалось, что поглощающий слой состоит из совокупности облаков, имеющих одинаковую оптическую толщину.

В настоящей заметке мы задаемся целью выяснить вопрос о корреляции яркостей в произвольно взятых парах точек Млечного Пути, находящихся на близком взаимном расстоянии.

Для этого составим среднее значение квадрата разности яркостей в двух произвольно избранных точках, находящихся на заданном угловом расстоянии φ друг от друга.

$$\overline{(J_1 - J_2)^2} = 2(\overline{J_1^2} - \overline{J_1 J_2}),$$

так как $\overline{J_1^2} = \overline{J_2^2}$. Очевидно, что $\overline{J_1 J_2}$ зависит от φ , в то время как $\overline{J_1^2}$ является значением $\overline{J_1 J_2}$ при $\varphi = 0$. Составим предел:

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\overline{(J_1 - J_2)^2}}{\varphi} = -2 \lim_{\varphi} \frac{\overline{J_1 J_2(\varphi)} - \overline{J_1 J_2(0)}}{\varphi} = -2 \left[\frac{d}{d\varphi} \overline{J_1 J_2} \right]_{\varphi=0}. \quad (1)$$

Таким образом, задача сводится к нахождению $\overline{J_1 J_2}$ при малых значениях φ .

Если число облаков, расположенных в первом направлении до расстояния s_1 от нас, обозначим через $n_1(s_1)$ (очевидно эта функция принимает случайные значения), то свет от звезды, находящейся на этом расстоянии, ослабнет в $q^{n_1(s_1)}$ раз, где q есть прозрачность одного

* ДАН АрмССР, 1, 9, 1944.

облака. Поэтому, если элемент dV галактического пространства излучает в единице телесного угла энергию ηdV (речь идет о суммарном излучении звезд, находящихся в этом элементе), то

$$J_1 = \int_0^{\infty} q^{n_1(s_1)} \eta ds_1.$$

Точно так же

$$J_2 = \int_0^{\infty} q^{n_2(s_2)} \eta ds_2.$$

Считая η постоянным, имеем отсюда:

$$\overline{J_1 J_2} = \eta^2 \overline{\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} q^{n_1(s_1) + n_2(s_2)} ds_1 ds_2}.$$

Усредняя под знаком интеграла, находим:

$$\overline{J_1 J_2} = \eta^2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \overline{q^{n_1(s_1) + n_2(s_2)}} ds_1 ds_2. \quad (2)$$

Вследствие постоянства плотности вероятности встречаемости поглощающих облаков в рассматриваемой части галактического пространства будем иметь:

$$\overline{q^{n_1(s_1) + n_2(s_2)}} = \overline{q^{n_1(s_2) + n_2(s_1)}}.$$

В силу такой симметрии мы можем разбить (2) на два равных между собою интеграла. Поэтому:

$$\overline{J_1 J_2} = 2\eta^2 \int_0^{\infty} ds_1 \int_{s_1}^{\infty} \overline{q^{n_1(s_1) + n_2(s_2)}} ds_2. \quad (3)$$

Теперь задача заключается в вычислении подинтегральной функции, в которой $s_2 > s_1$.

Имеем:

$$\overline{q^{n_1(s_1) + n_2(s_2)}} = \sum_{n_1, n_2} P(n_1, n_2; s_1, s_2) q^{n_1 + n_2}, \quad (4)$$

где $P(n_1, n_2; s_1, s_2)$ есть вероятность той или иной пары значений n_1 и n_2 при заданных s_1 и s_2 . Но по теореме умножения вероятностей:

$$P(n_1, n_2; s_1, s_2) = P(n_1; s_1) P_{n_1(s_1)}(n_2; s_2), \quad (5)$$

где $P_{n_1(s_1)}(n_2; s_2)$ есть вероятность того или иного значения $n_2(s_2)$ при заданном $n_1(s_1)$. Что касается $P(n_1; s_1)$, то она представляет вероятность того, что на расстоянии s_1 имеется n_1 облаков и определяется формулой Пуассона:

$$P(n_1; s_1) = e^{-\nu s_1} \frac{(\nu s_1)^{n_1}}{n_1!}, \quad (6)$$

где ν среднее число облаков, пересекаемых лучом на единице пути.

Остановимся на вычислении $P_{n_1(s_1)}(n_2; s_2)$. Мы введем для этой цели вероятность Q того, что поглощающее облако, пересекающее первый из наших лучей на расстоянии, меньшем чем s_1 от наблюдателя, пересечет и второй луч. Очевидно, что Q зависит от s_1 и φ . При этом мы будем считать, что точка пересечения облака с первым лучом может с одинаковой вероятностью находиться в любом месте отрезка $(0, s_1)$.

Вычислим вероятность того, что из полного количества облаков, пересекающих первый луч, некоторое количество β уже не пересекает второго луча и только $n_1 - \beta$ пересекает второй луч. Очевидно, что эта вероятность равна:

$$\frac{n_1!}{\beta! (n_1 - \beta)!} (1 - Q)^\beta Q^{n_1 - \beta}.$$

Если из числа пересекающих первый луч туманностей второй луч пересекает лишь $n_1 - \beta$, то для того, чтобы второй луч пересекало всего n_2 -туманностей, необходимо, чтобы этот луч пересекало $\alpha = n_2 - n_1 + \beta$ туманностей, не пересекающих первый на отрезке $(0, s_1)$. Вероятность этого события в свою очередь определяется формулой Пуассона:

$$e^{-\bar{\alpha}} \frac{\bar{\alpha}^\alpha}{\alpha!}.$$

Значение $\bar{\alpha}$ мы определим в дальнейшем.

По теореме умножения вероятность того, что при данном n_1 второй луч пересекает $n_1 - \beta$ туманностей, пересекающих первый на отрезке $(0, s_1)$ и вместе с тем полное число пересекающих второй луч туманностей на отрезке $(0, s_2)$ будет n_2 , равна произведению:

$$e^{-\bar{\alpha}} \frac{\bar{\alpha}^\alpha}{\alpha!} \frac{n_1!}{\beta! (n_1 - \beta)!} (1 - Q)^\beta Q^{n_1 - \beta}.$$

Поскольку β может принимать разные значения от 0 до n_1 , мы получаем, что искомая вероятность $P_{n_1(s_1)}(n_2; s_2)$ равна:

$$P_{n_1(s_1)}(n_2; s_2) = \sum_{\beta=0}^{n_1} e^{-\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}} \frac{\bar{\alpha}^\alpha}{\alpha! \beta! (n_1 - \beta)!} (1 - Q)^\beta Q^{n_1 - \beta}.$$

Следовательно, на основании (6),

$$P(n_1, n_2; s_1, s_2) = e^{-\nu s_1} \frac{(\nu s_1)^{n_1}}{n_1!} \sum_{\beta=0}^{n_1} e^{-\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}} \frac{\bar{\alpha}^\alpha}{\alpha! \beta! (n_1 - \beta)!} (1 - Q)^\beta Q^{n_1 - \beta}.$$

Подставляя в (4), меняя порядок суммирования и принимая во внимание, что $\alpha = n_2 - n_1 + \beta$, после несложных преобразований получаем:

$$\overline{n_1(s) + n_2(s)} = e^{-[\nu s_1 + \alpha](1 - q) - q\nu s_1 Q(1 - q)}. \quad (7)$$

Теперь необходимо выяснить, чему равно среднее число туманностей $\bar{\alpha}$, пересекающих отрезок s_2 второго луча, но не пересекающих отрезок s_1 первого.

Очевидно, что среднее число туманностей, пересекающих вообще отрезок s_2 , равно νs_2 . Однако из этого числа в среднем $Q\nu s_1$ пересекает и луч s_1 .

Поэтому

$$\bar{\alpha} = \nu(s_2 - Qs_1).$$

Подставляя в (7), находим:

$$\overline{n_1(s) + n_2(s)} = e^{-\nu(s_1 + s_2)(1 - q) + \nu s_1 Q(1 - q)^2}.$$

Внося в (3) и производя интегрирование по s_2 , получим:

$$\begin{aligned} \overline{J_1 J_2} &= \frac{2r_1^2}{\nu(1 - q)} \int_0^\infty e^{-\nu s_1(1 - q)\{2 - Q(1 - q)\}} ds_1 = \\ &= \frac{2r_1^2}{\nu(1 - q)} \int_0^\infty e^{-\nu s_1(1 - q^2)\{1 - \nu s_1(1 - Q)(1 - q)^2\}} ds_1, \end{aligned} \quad (8)$$

поскольку $1 - Q$ малая величина для малых углов φ и в разложениях можно ограничиться ее первой степенью.

Разность $1 - Q$ есть вероятность того, что туманность, пересекающая первый луч, не пересечет второго. Для малых углов φ между лучами эта вероятность должна быть пропорциональна среднему расстоянию между лучами, которое равно $\frac{\varphi s_1}{2}$. Поэтому

$$1 - Q = \frac{\varphi S_1}{R},$$

где $\frac{1}{R}$ есть коэффициент пропорциональности.

Подставляя в (8) и интегрируя, находим:

$$\overline{J_1 J_2} = \frac{2r_1^2}{\nu(1-q)} \left\{ \frac{1}{\nu(1-q^2)} - \frac{2(1-q)^2 \varphi}{R\nu^2(1-q^2)^3} \right\}. \quad (9)$$

Внося это в (1), получаем:

$$\lim_{\varphi=0} \frac{(\overline{J_1 - J_2})^2}{\varphi} = -2 \frac{d}{d\varphi} \overline{J_1 J_2} = \frac{8r_1^2}{R\nu^3(1-q)^2(1+q)^3}. \quad (10)$$

Для производной коэффициента корреляции находим:

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{4}{R\nu(1+q)^2}, \quad (11)$$

потому что, на основании (9),

$$\overline{J_1^2} = \overline{J_2^2} = \frac{2r_1^2}{R\nu(1-q^2)(1-q)}.$$

Таким образом, коэффициент корреляции яркостей двух точек, находящихся на малом расстоянии φ друг от друга в Млечном Пути, равен:

$$r = 1 - \frac{4\varphi}{R\nu(1+q)^2}. \quad (12)$$

Мы видели выше, что вероятность непересечения второго луча туманностью, пересекающей первый луч, равна:

$$1 - Q = \frac{\varphi S_1}{R}.$$

Очевидно, что R должно быть порядка радиуса одной туманности. Таким образом, в формулу (12) в качестве характерной безразмерной величины входит произведение νR . Для того чтобы яркости двух точек были независимы, нужно, чтобы угол φ достиг порядка величины νR .

Астрономическая обсерватория
Академии наук АрмССР,
Ереван, 1944, апрель

ЛИТЕРАТУРА

1. ДАН СССР, **44**, 244, 1944. *Ред.*
2. Амбарцумян, Теоретическая астрофизика, 207—209, ГТТИ, 1939.

К ВОПРОСУ О ХАРАКТЕРЕ СВЯЗИ ДИФFUЗНЫХ ТУМАННОСТЕЙ С ОСВЕЩАЮЩИМИ ИХ ЗВЕЗДАМИ*

(Представлено 18.IV 1945)

Для решения вопроса о характере связи диффузных туманностей с освещающими их звездами автором совместно с Ш. Г. Горделадзе [1] в 1937 г. был предложен следующий метод. Если указанная связь носит случайный характер, т. е., если туманность и освещающая ее звезда не связаны генетически, а просто встречаются при движении в звездной системе, то число диффузных туманностей, освещенных звездами какого-либо спектрального типа, должно быть пропорционально сумме объемов пространства, освещенных звездами данного типа. При этом под объемом, освещенным какой-либо звездой, мы подразумеваем объем такой сферы вокруг звезды, что если туманность окажется внутри этой сферы, то ее поверхностная яркость окажется выше того нижнего предела, которым ограничен имеющийся у нас каталог диффузных туманностей. Объем этот будет зависеть от абсолютной фотографической величины M звезды и, как нами было указано, выражается формулой:

$$V = V_0 \cdot 10^{-0,6 M}, \quad (1)$$

где V_0 есть объем, освещенный звездой, абсолютная величина которой равна нулю**.

Если в единице объема имеется n звезд i -того спектрального

* ДАН АрмССР, 2, 67, 1945.

** Значение V_0 можно вычислить по следующей формуле, которая выведена в цитированной статье автора и Горделадзе:

$$\log V_0 = \log \frac{4}{3} \pi - 1,5 \log 4\pi (206\,000)^2 + 16,95.$$

Однако, при печатании указанной статьи в этой формуле была допущена опечатка и ее нужно читать так, как она воспроизведена здесь. Все вычисления в указанной статье были сделаны по правильной формуле.

типа и функция светимости есть $\Phi_i(M)$, то из единицы объема звезды данного спектрального типа освещают долю, равную

$$P_i = n_i V_0 \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_i(M) 10^{-0,6M} dM. \quad (2)$$

В упомянутой работе путем использования таблиц значений функций светимости различных спектральных типов, данных Van Rhijn'ом и Schwassman'ом [2], были найдены численные значения P_i для окрестностей Солнца. Полученные значения P_i для различных спектральных типов были сравнены с наблюдаемыми числами N_i туманностей, освещенных звездами соответственных спектральных типов. В случае правильности гипотезы о случайном характере связи диффузных туманностей с освещающими их звездами, числа N_i должны быть пропорциональны значениям P_i . Было показано, что такая пропорциональность имеет место с той степенью точности, которую можно вообще ожидать. Отсюда был сделан вывод о том, что рассматриваемая связь действительно носит случайный характер.

В упомянутой работе величины P_i были вычислены из значений $\Phi_i(M)$. С одной стороны, однако, это приводит к громоздким вычислениям, с другой стороны—функции светимости нам известны плохо.

Целью настоящей заметки является показать, что значения P_i для окрестностей Солнца, определяемые формулой (2), могут быть получены непосредственно из наблюдений. Для этого применим к звездам рассматриваемого спектрального типа основное интегральное уравнение Шварцшильда:

$$A_i(m) = \omega \int_0^{\infty} \Phi_i(M) n_i(r) r^2 dr. \quad (3)$$

Если будем применять это уравнение к звездам высокой видимой яркости (напр., к звездам, видимым простым глазом), расстояния которых малы, то можно пренебречь поглощением света, а также считать, что числа n_i не зависят от расстояния. Тогда можем пользоваться связью $5 \log r = 5 \log r_0 + m - M$, где $r_0 = 10$ парсек и уравнение (3) даст:

$$A_i(m) = \frac{\omega n_i r_0^3}{5 \log e} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_i(M) 10^{0,6(m-M)} dM$$

или

$$n_i \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_i(M) 10^{-0,6M} dM = \frac{5 \log e}{\omega r_0^3} A(m) 10^{-0,6m}. \quad (4)$$

Сравнивая (4) с (2), находим:

$$P_i = \frac{5 \cdot V_0 \log e}{\omega r_0^3} A(m) 10^{-0,6m}. \quad (5)$$

В пределах сделанных предположений о постоянстве звездной плотности и об отсутствии поглощения произведение $A(m)10^{-0,6m}$ должно оставаться постоянным. Вследствие несоблюдения этих предположений это произведение вообще падает при возрастании m .

Для вычисления P_i нужно, очевидно, взять это произведение для возможно более ярких звезд. Нами был использован интервал между видимыми величинами 2.0 и 5.0. Звезды различных спектральных типов были подсчитаны в поясе между галактическими широтами $\pm 10^\circ$ по каталогу ярких звезд Schlesinger'a. Так как наблюдения диффузных туманностей производились до сих пор главным образом в фотографических лучах, то во всех приведенных выше рассуждениях должны фигурировать фотографические видимые и абсолютные величины. Поскольку в каталоге Шлезингера даются визуальные величины, мы перешли к фотографическим с помощью стандартных колориндексов.

Полученные в результате проделанных вычислений значения P_i мы приводим во втором столбце прилагаемой таблицы. В третьем столбце приведены значения P_i , вычисленные в нашей работе 1937 года. Наконец, в четвертом столбце приводятся значения N_i .

Спектр	P_i	P_i (1937 г.)	N_i
О	$0.2 \cdot 10^{-4}$	$0.2 \cdot 10^{-4}$	11
В0	0.2	0.6	7
В1—В9	2.2	2.9	54
А	0.6	0.8	5
F	0.5	0.25	2
G	0.10	0.18	1
К	0.45	0.25	2
М	0.05	0.02	0

Сравнение второго и четвертого столбцов опять говорит решительно в пользу правильности гипотезы случайной связи. С другой стороны, мы видим, что $\Sigma P_i = 5,2 \cdot 10^{-4}$, т. е. в среднем из 2000 диффузных туманностей только одна оказывается освещенной какой-либо звездой, что также подтверждает вывод нашей прежней работы. Согласие между новыми и старыми значениями P_i надо считать также вполне удовлетворительным.

В заключение выражаю благодарность Г. А. Гурзядяну, оказавшему помощь при выполнении настоящей работы.

Астрономическая обсерватория
Академии наук АрмССР,
Ереван, 1944, апрель

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. А. Амбарцумян и Ш. Г. Горделадзе, Бюллетень Абастуманской обсерватории, **2**, 37, 1938.
2. Z. f. Ar., **10**, 161, 1945.

О ПОВЕРХНОСТНЫХ ЯРКОСТЯХ В ГАЛАКТИКЕ*

§ 1. *Полные поверхностные яркости.* При изучении строения нашей Галактики мы пользуемся в основном звездными подсчетами. При этом анализ звездных подсчетов, производимый для получения данных о строении нашей звездной системы, связан с рядом трудностей частью принципиального, частью технического характера. В частности, он требует знания функции светимости и ее изменений в пространстве.

Однако *некоторые* сведения о строении Галактики возможно получить без детального анализа звездных подсчетов. Для этого достаточно использовать *поверхностные яркости*, обусловленные звездами, т. е. суммарные видимые яркости всех звезд, приходящихся на единичный телесный угол, скажем, на квадратный градус. В дальнейшем мы будем употреблять термин полная поверхностная яркость именно в указанном смысле. Само собою разумеется, что в наши полные поверхностные яркости не входят яркости незвездного происхождения, например, свечение ночного неба, зодиакальный свет и т. д. Мы не будем включать в них также „галактический свет“, т. е. свет звезд, рассеянный космической пылью и диффузными туманностями, а также свет от внегалактических источников.

К сожалению, наши данные о полных поверхностных яркостях I должны пока получаться из интегрирования звездных подсчетов по разным величинам согласно формуле

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} A(m) 10^{0.4(m_0 - m)} dm, \quad (1)$$

где I выражено в звездах величины m_0 с квадратного градуса, а $A(m)$ число звезд с видимыми величинами между $m - \frac{1}{2}$ и $m + \frac{1}{2}$ на квадратный градус. Величина I есть функция координат на небесной сфере.

* Астр. журн., **23**, 257, 1946.

Попытка прямых определений I на основании наблюдения яркости неба и исключения посторонних компонент сделана в последней работе Фесенкова [1], и накопление систематических наблюдений подобного типа в высшей степени желательно.

При вычислении I согласно формуле (1) мы встречаемся с двумя трудностями. Иногда слабые звезды, на которые подсчеты еще не распространены (слабее 20^m), вносят значительную долю в величину интеграла (1). Эту долю приходится вычислять путем экстраполяции. Эта трудность имеет значение главным образом для низких галактических широт.

Для очень ярких звезд значение $A(m)$ становится хотя и малым, но неопределенным. Из-за этого происходят флуктуации величины I в зависимости от того, попадает или нет в рассматриваемый участок неба одна из немногочисленных ярких звезд.

Несмотря на это, подсчеты Van Rhijn'a [2] и непосредственный учет ярких звезд позволяют с уверенностью определять полную поверхностную яркость I для разных направлений.

§ 2. *Парциальные поверхностные яркости.* Наряду с полными поверхностными яркостями мы можем рассматривать также *парциальные поверхностные яркости*, обусловленные звездами того или иного физического типа.

Так; можно говорить о парциальной поверхностной яркости, возникающей от звезд типа F, или о парциальной поверхностной яркости от c -звезд и т. д.

Парциальные поверхностные яркости, очевидно, вычисляются по той же формуле (1), с той лишь разницей, что $A(m)$ уже представляют числа звезд данного типа.

Сказанное о трудностях вычисления полных поверхностных яркостей в еще большей мере относится к парциальным поверхностным яркостям вследствие неполноты данных, скажем, о спектральных типах слабых звезд.

Основными данными для вычисления парциальных поверхностных яркостей, обусловленных звездами различных спектральных типов, могут служить подсчеты звезд по HDC, BSD и HDE.

Заметим, что если все звезды поделены на ряд *неперекрывающихся* физических типов (такое разделение может быть произведено различными способами по разным признакам, например по спектру, по светимости, по признаку переменности и т. д.), то полная поверхностная яркость равна сумме парциальных поверхностных яркостей.

В последнее время часто производится разделение Галактики на ряд взаимно проникающих подсистем по разным физическим призна-

кам (Lindblad [3], Кукаркин [4]). Парциальная поверхностная яркость есть поверхностная яркость от звезд рассматриваемой подсистемы.

§ 3. *Коэффициенты излучения.* При теоретическом расчете поверхностных яркостей нам придется рассматривать полный и парциальные коэффициенты излучения. Под полным коэффициентом излучения η мы будем понимать суммарную яркость всех звезд, приходящихся на один кубический парсек, выраженную в яркостях звезд некоторой абсолютной величины M .

Если $\Phi(M)$ есть функция светимости, нормированная таким образом, что

$$\int \Phi(M) dM = n, \quad (2)$$

где n — полное число звезд на кубический парсек, то

$$\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(M) 10^{0.4(M_0 - M)} dM. \quad (3)$$

Таким же образом могут быть определены *парциальные* коэффициенты излучения для звезд, обладающих тем или иным физическим признаком.

Переход от чисел звезд в единице объема и в единичном телесном угле к коэффициентам излучения и поверхностным яркостям является переходом от микроскопической точки зрения к „макроскопической“.

Такая макроскопическая точка зрения уже давно по существу применяется при изучении внешних Галактик, например при изучении эллиптических туманностей (сравнить хотя бы работы Oort'a [5] об эллиптических туманностях NGC 3115 и 4494). В галактической же астрономии она была пока использована лишь в отдельных случаях, например, для решения одной задачи в работе Greenstein'a и Henyey'a [6] о количестве света, рассеиваемого космической пылью, и в работах автора [7, 8] о флуктуациях в поверхностных яркостях Млечного Пути.

Greenstein'ом и Henyey'ом была получена в частности формула (9) настоящей работы и проведено сравнение, аналогичное тому, которое у нас дано в табл. 1. Однако они не сделали тех выводов физического характера, касающихся относительного распределения звезд и темной материи, к которым приходим мы, и которые имеют большое принципиальное значение.

Заметим, наконец, что значение полного коэффициента излучения в окрестностях Солнца довольно хорошо определяется из функции светимости Van-Rhijn'a и равна 4.8 звезд с абсолютной величиной $10^m 0$ в фотографических лучах и 6.1 звезд $10^m 0$ в визуальных лучах. Это означает, что колор-индекс среднего излучения звезд в окрестностях Солнца равен $+ 0^m 26$.

§ 4. *Коэффициент поглощения и оптическое расстояние от плоскости Галактики.* В дальнейшем мы отвлечемся от клочковатой структуры поглощающей среды в Галактике и будем рассматривать некоторый непрерывный макроскопический коэффициент поглощения α , который будет непрерывной функцией координат. Для любой точки в Галактике мы можем образовать интеграл от величины α вдоль перпендикуляра, опущенного из этой точки до плоскости симметрии Галактики. Эту величину назовем оптическим расстоянием рассматриваемой точки до плоскости симметрии Галактики и обозначим ее через τ . Имеем:

$$\tau = \int_0^z \alpha dz, \quad (4)$$

где z — линейное удаление от галактической плоскости.

Когда z стремится к бесконечности, τ стремится к τ_0 , т. е. к полной оптической полутолщине Галактики

$$\tau_0 = \int_0^{\infty} \alpha dz. \quad (5)$$

Вообще τ есть функция z , x , y , а τ_0 — функция от x и y . Однако в том приближении, в каком можно принять модель плоскопараллельных слоев в Галактике (вблизи Солнца), τ зависит только от z , а τ_0 есть постоянная.

В модели плоскопараллельных слоев τ есть функция только z , т. е. она может рассматриваться как функция z .

Значение τ_0 в фотографических лучах равно $0^m 25$ по Hubble'у [9] и $0^m 34$ по Паренаго [10].

§ 5. *Полные поверхностные яркости при плоскопараллельных слоях.* Как показали работы Вашакидзе [11] и Оорта [12], гипотеза плоскопараллельных слоев довольно хорошо согласуется с распределением звезд по видимым величинам в высоких галактических широтах. Правда, более точное исследование приводит к обнаружению ряда уклонений от этой модели, однако в известном

приближении мы можем пользоваться ею. Если в этой модели η , как и α , есть функция τ , то и отношение

$$\frac{\eta}{\alpha} = B(\tau)$$

будет функцией τ .

Поверхностная яркость на галактической широте b в рассматриваемой модели тогда представится формулой

$$I(b) = \int_0^{\tau_0} e^{-\frac{\tau}{\sin b}} B(\tau) \frac{d\tau}{\sin b}. \quad (6)$$

Впрочем, эта формула соответствует лишь тому случаю, когда все звезды погружены в поглощающий слой. Если часть звезд настолько удалена от галактической плоскости, что находится вне поглощающего слоя, то для $I(b)$ будем иметь:

$$I(b) = \int_0^{\tau_0} e^{-\frac{\tau}{\sin b}} B(\tau) \frac{d\tau}{\sin b} + C e^{-\frac{\tau_0}{\sin b}} \frac{1}{\sin b}. \quad (7)$$

Второй член соответствует звездам, лежащим вне поглощающего слоя, и обращается в нуль при $b = 0$, т. е. эти звезды ничего не прибавляют к яркости экватора Млечного Пути.

Остановимся пока на случае формулы (6), т. е. примем, что все звезды погружены в поглощающий слой. Это будет в частности при условии, что η убывает при возрастании τ относительно быстрее, чем α . При этом последнем условии введем следующую приближенную схему:

$$B(\tau) = B_0 = \text{const} \quad \text{при} \quad \tau < \tau_1 < \tau_0 \quad (8a)$$

и

$$B(\tau) = 0 \quad \text{при} \quad \tau_1 < \tau < \tau_0, \quad (8b)$$

где τ_1 некоторая постоянная. Принятие формул (8a, b) означает, что мы допускаем постоянство отношения коэффициента излучения к коэффициенту поглощения до некоторого расстояния от плоскости Галактики, а далее считаем коэффициент излучения равным нулю.

Тогда (6) дает

$$I(b) = B_0 (1 - e^{-\tau_1 \text{cosec } b}). \quad (9)$$

Очевидно, что B_0 есть яркость галактического экватора и может быть взята из наблюдений. Спрашивается, можно ли подобрать τ_1 таким, чтобы вычисленные из (9) поверхностные яркости оказались в:

согласии с поверхностными яркостями, вычисленными на основании данных Ван-Райна об усредненных по долготам значениях $A(m)$.

Во втором столбце табл. 1 приведены $I(b)$ для разных b , вычисленные по (9) в предположении $B_0=220$ звезд десятой величины (фотограф.), с квадратного градуса и $\tau_1=0,12$. В третьем столбце той же таблицы даны значения I_1 в тех же единицах, полученные по указанным выше звездным подсчетам.

Таблица 1

b	I_c	I_{obs}
0°	220	220
10	108	104
20	65	66
30	46	47
40	37	37
90	26	25

Сравнение обоих столбцов показывает, что принятая модель хорошо соответствует усредненному по долготам распределению яркостей звезд. Таким образом, звезды, лежащие вне поглощающего слоя, не влияют на распределение поверхностных яркостей. Поэтому второй член в формуле (7) является излишним. Более того, оптическая толщина в формуле (9) оказывается равной только $\tau_1=0,12$, т. е. эффективная оптическая полутолщина того поглощающего слоя, в котором расположены звезды, равна 0.12. С другой стороны, поскольку минимальное значение τ_0 равно 0.23 (или 0.25 в звездных величинах), то не остается никаких сомнений, что значительная часть поглощающего слоя расположена в области, где звезд очень мало, или, что η убывает быстрее, чем α .

К этому выводу другими путями приходили и другие авторы, например, Аллер и Тремплер [13]. Точно так же Оорт [14] отмечал, что большую концентрацию к плоскости Галактики показывает лишь селективно поглощающая материя, в то время как материя, обладающая нейтральным поглощением, более рассеяна.

§ 6. *Уточненное толкование полученного результата.* Теперь, когда путем сравнения с наблюдениями вновь подтверждена некоторая применимость модели плоскопараллельных слоев, мы можем остановиться на толковании полученных значений параметров B_0 и τ_1 ,

Для этого заметим, что вследствие малости τ_1 формула (9) для высоких галактических широт может быть написана в форме:

$$I(b) = B_0 \tau_1 \operatorname{cosec} b \quad (10)$$

или, при $b = \frac{\pi}{2}$

$$I\left(\frac{\pi}{2}\right) = B_0 \tau_1, \quad (10)$$

а при $b = 0^\circ$

$$I(0) = B_0. \quad (11)$$

С другой стороны, более общая формула (6) дает для $b = \frac{\pi}{2}$ при малых τ_1

$$I\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\tau_1} B(\tau) d\tau \quad (12)$$

и для $b = 0^\circ$

$$I(0) = B(0). \quad (13)$$

Из (12) и (13) получаем:

$$\frac{I\left(\frac{\pi}{2}\right)}{I(0)} = \frac{\int_0^{\tau_1} B(\tau) d\tau}{B(0)},$$

а из (10) и (11) смысл условного числа τ_1

$$\tau_1 = \frac{I\left(\frac{\pi}{2}\right)}{I(0)}. \quad (14)$$

Из сопоставления этих двух равенств имеем:

$$\tau_1 = \frac{\int_0^{\tau_1} B(\tau) d\tau}{B(0)}, \quad (15)$$

или, поскольку

$$\int_0^{\tau_1} B(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} \eta dz \quad \text{и} \quad B(0) = \frac{\eta(0)}{\alpha(0)}, \quad (16)$$

то

$$\tau_1 = \alpha(0) \frac{\int_0^{\infty} \eta dz}{\eta(0)} = \alpha(0) z_1. \quad (17)$$

Таким образом, τ_1 представляет собою оптическую толщину слоя, обладающего таким же коэффициентом поглощения, какой имеется в плоскости симметрии Галактики, и линейной толщиной, равной

$$z_1 = \frac{\int_0^{\infty} \eta dz}{\eta(0)}. \quad (18)$$

Последняя же величина есть не что иное, как „линейная полутолщина однородной светящейся Галактики около Солнца“, т. е., если бы на протяжении такой высоты от плоскости Галактики η была постоянной и равнялась $\eta(0)$, то произведение $z_1\eta(0)$ было бы равно

$$\int_0^{\infty} \eta dz.$$

Из формулы (17) можно получить значение z_1 , если только известно значение $\alpha(0)$.

§ 6. *Определение $\alpha(0)$.* Из (13) и (16) непосредственно следует, что

$$I(0) = \frac{\eta(0)}{\alpha(0)}. \quad (19)$$

Формула (19) дает нам возможность определения значения $\alpha(0)$ коэффициента поглощения в плоскости Галактики в окрестностях Солнца, так как $I(0)$ известно из наблюдений, а $\eta(0)$ может быть вычислено из известной для окрестностей Солнца функции светимости по формуле (3).

Мы уже видели, что $I(0)$ равняется 220 звездам десятой величины с квадратного градуса. Ту же самую величину можно выразить в звездах десятой абсолютной величины с квадратного парсека. Для этого указанное численное значение нужно помножить на 33. Получится $7.3 \cdot 10^3$ звезд десятой абсолютной фотографической величины с квадратного парсека. С другой стороны, на основании функции светимости Ван-Райна нетрудно подсчитать, что $\eta(0)$ равно 0.048 звезд десятой абсолютной фотографической величины с кубопарсека. Произведя деление, получаем $\alpha(0) = 0,66$ на килопарсек.

Но это есть значение коэффициента поглощения, определяемое обычным образом. Переходя к звездным величинам, получаем коэффициент поглощения, равный $0^m.72$ на килопарсек.

К сожалению, пока мы мало что можем сказать о степени точности этого результата. Это связано прежде всего с тем, что мы ни-

чего не знаем пока о степени точности значения $\eta(0)$. Кроме того, отклонения от положенной нами в основу гипотезы плоскопараллельных слоев также могут играть известную роль. В частности, возможна небольшая положительная поправка к полученному значению $\alpha(0)$, если Солнце расположено в разрежении и окружено более густо населенными областями.

Наконец, поскольку для вычисления $I(0)$ нами использованы числа звезд, усредненные по долготам, и поскольку $I(0) = \frac{\eta(0)}{\alpha(0)}$, полученное значение $\alpha(0)$ есть среднее гармоническое. При значительных флуктуациях действительной величины $\alpha(0)$ в зависимости от направления среднее гармоническое и среднее арифметическое должны отличаться друг от друга, причем среднее арифметическое должно быть больше. Поэтому среднее арифметическое поглощение должно быть больше, чем 0.72 звездной величины на килопарсек. По предварительной оценке поправка может достигать 0.10 звездной величины. Поэтому для среднего арифметического значения коэффициента поглощения мы будем иметь:

$$\alpha(0) = 0,82 \frac{\text{звездной величины}}{\text{килопарсек}}$$

Необходимо вновь подчеркнуть, что все полученные здесь по новому методу цифры для коэффициента поглощения являются совершенно предварительными.

§ 7. *Определение z_1* . Из формулы (17) имеем для z_1 :

$$z_1 = \frac{\tau_1}{\alpha(0)}$$

Используя полученные τ_1 и $\alpha(0)$, получаем:

$$z_0 = 160 \text{ парсек.}$$

Поэтому полная толщина однородно светящейся Галактики в районе Солнца составляет около 320 парсек.

§ 8. *Определение τ_1 для отдельных типов звезд*. Используя парциальные поверхностные яркости для отдельных классов звезд, мы можем определить соответствующее им значение τ_1 , подобно тому, как это мы сделали для совокупности всех звезд.

Однако вследствие недостаточности наших данных о спектральных типах и других характеристиках слабых звезд мы можем получить более или менее реальные данные о парциальных поверхностных яркостях только тех типов, у которых эта яркость определяется в основном звездами высокой видимой яркости.

К числу таких классов звезд относятся В-звезды и цефеиды.

Нами было произведено определение α_1 следующим образом. Если взять поверхностную яркость в высоких галактических широтах, то, вследствие малости τ_1 , из формулы (9) будем иметь:

$$I(b) = B_0 \tau_1 \operatorname{cosec} b,$$

а у экватора Галактики

$$I(0) = B_0.$$

Откуда

$$\tau_1 = \frac{I(b)}{I(0)} \sin b. \quad (20)$$

В частности

$$\tau_1 = \frac{I\left(\frac{\pi}{2}\right)}{I(0)}. \quad (20')$$

Для рассматриваемых классов число их представителей в высоких галактических широтах очень мало, поэтому для получения надежного значения поверхностной яркости нужно взять весьма обширную околополярную область (например, иногда область от $\pm 30^\circ$ до $\pm 90^\circ$). Однако в этой области сама широта b меняется тогда в значительных пределах. Но мы можем проинтегрировать (20) по некоторому телесному углу ω и разделить на ω . Тогда получим:

$$\tau_1 = \frac{1}{\omega I(0)} \int I(b) \sin b d\omega. \quad (21)$$

И так как на самом деле рассматриваемая яркость состоит из свечения отдельных звезд, то интеграл сводится к сумме

$$\tau_1 = \frac{1}{\omega I(0)} \sum i \sin b, \quad (22)$$

где i — яркости отдельных звезд. При этом суммирование распространено на все звезды рассматриваемого типа, расположенные в области ω .

Вместе с тем отметим, что сравнение (20') и (22) дает

$$J\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\omega} \sum i \sin b. \quad (23)$$

Формула (23) дает нам возможность определить $J\left(\frac{\pi}{2}\right)$ даже для тех случаев, когда в непосредственной близости от полюса нет или почти нет звезд рассматриваемого типа.

Что касается $I(0)$, то оно может быть определено путем суммирования яркостей звезд в какой-либо узкой экваториальной зоне, например в пределах между $\pm 5^\circ$ галактической широты.

Вычисления, основанные на известных каталогах фотографических яркостей, дали следующие результаты.

а) Средняя парциальная визуальная поверхностная яркость для звезд типов O—B0—B1—B2 при $b = 0^\circ$ равна 2.7 звезды десятой величины на 1 квадратный градус.

б) Средняя парциальная визуальная поверхностная яркость для звезд типов O—B0—B1—B2 при $b = 90^\circ$ равна 0.23 звезды десятой величины на 1 квадратный градус.

Эти два результата получены по данным HDC, который надо считать в данном случае исчерпывающим, так как звезды типа B, слабее $8^m 0$, дают совместно очень малую долю суммарной яркости.

На основании (22) для звезд O—B2 из приведенных цифр получается

$$\tau_1 = 0.09.$$

Однако необходимо указать здесь на один источник возможных ошибок при определении τ_1 . Дело в том, что при малочисленности звезд данного типа в высоких галактических широтах возможны широкие флуктуации при определении величины $I\left(\frac{\pi}{2}\right)$ по формуле (23). Иными словами, в зависимости от случайного наличия или отсутствия вблизи Солнца той или иной звезды рассматриваемого класса может получиться различное значение поверхностной яркости.

Конкретно в данном случае звезда α Virginis дает почти столько же при вычислении суммы (23), сколько остальные 26 звезд типа O—B2, имеющие $|b| > 20^\circ$. Поэтому откидывание одной этой звезды дает $\tau_1 = 0.05$.

К счастью, отбрасывание других звезд не сказывается на результате. Поэтому мы решили принять для O—B2 значение $\tau_1 = 0.07$.

с) Средняя парциальная фотографическая поверхностная яркость, обусловленная цефеидами (классическими) при $b = 0$, равна 0.14 звезды десятой величины на квадратный градус.

д) Средняя парциальная фотографическая поверхностная яркость, обусловленная классическими цефеидами, при $b = 90^\circ$ равна 0.006 звезды десятой величины на квадратный градус.

Из этих двух цифр мы получаем $\tau_1 = 0.04$.

К сожалению, на этот раз звезда δ Cephei определяет собой значительную долю яркости экваториальной зоны. Если отбросить ее, то для τ_1 получится значение $\tau_1 = 0.07$ и в среднем мы имеем $\tau_1 = 0.06$.

Таким образом, мы принимаем:

$$\text{для звезд О—В2} \quad \tau_1 = 0,07,$$

$$\text{для цефеид} \quad \tau_1 = 0,06.$$

Хотя, как мы видим, полученные для этих классов объектов значения τ_1 заключают известную неопределенность, все же порядок их определен довольно хорошо. Малость значений τ_1 для этих категорий объектов не является неожиданной, так как они обладают сильной галактической концентрацией и, следовательно, сосредоточены в средней части поглощающего слоя.

9. *Планетарные туманности.* Изучение распределения суммарных яркостей планетарных туманностей по небу приводит к столь неожиданному результату, что на них стоит остановиться особо.

Нами были подсчитаны суммарные фотографические яркости этих объектов по галактическим поясам и получены для различных галактических широт средние поверхностные яркости, выраженные в звездах двадцатой величины с квадратного градуса, приведенные во втором столбце табл. 2. При этом были использованы данные каталога планетарных туманностей, приложенного к книге Воронцова-Вельяминова: „Новые звезды и планетарные туманности“.

Как легко видеть, наличие минимума $I(b)$ не позволяет удовлетворительно представить наблюдательные данные с помощью формулы (9). Поэтому мы вернулись к формуле (7) и приняли в ней, что $B(\tau)$ имеет некоторое значение B_0 в интервале от $\tau=0$ до $\tau_1=0,04$. Далее вне этого интервала $B(\tau)$ настолько мало, что интеграл от $\tau=0,04$ до $\tau=\tau_0$ не имеет существенного значения. С другой стороны, мы приняли, что C отлично от нуля, что означает наличие большого числа туманностей вне поглощающего слоя.

Такая картина эквивалентна представлению о том, что планетарные туманности состоят из двух групп, из которых одна чрезвычайно сильно сконцентрирована около плоскости Галактики, а другая настолько рассеяна, что подавляющее большинство ее членов находится вне поглощающего слоя.

Тогда имеем формулу:

$$I = B_0 \left(1 - e^{-\frac{\tau_1}{\sin b}} \right) + C e^{-\frac{\tau_0}{\sin b}} \quad (24)$$

Значения I , вычисленные при наилучших значениях постоянных: $B_0 = 40$ звезд 20-й величины с квадратного градуса, $\tau_1 = 0,04$, $\tau_0 = 0,3$ и $C = 20$ звезд 20-й величины с квадратного градуса, приводятся в третьем столбце табл. 2.

Т а б л и ц а 2

b	I_{obs}	I_c
0°	44	40
7	22	25
12	46	30
20	15	29
32	15	25
60	21	18

Мы видим, что, несмотря на вхождение в формулу (24) трех параметров, согласие между наблюдаемыми и вычисленными значениями не вполне удовлетворительное. Тем более замечательно согласие, получившееся для случая всех звезд в табл. 1.

Впрочем часть расхождений табл. 2 должна быть отнесена за счет малочисленности планетарных туманностей и, следовательно, больших флуктуаций.

§ 10. *Цвет Галактики.* Если представим себе наблюдателя, расположенного вне Галактики в направлении ее оси вращения, то мы можем попытаться рассчитать поверхностную яркость, которую он измерит в том месте Галактики, где находится наше Солнце. Известно, что эта поверхностная яркость, если только пренебречь дифференциальным влиянием космического поглощения, равна удвоенному значению той поверхностной яркости, которую мы наблюдаем в направлении полюса Галактики, в том смысле, как это понимается в настоящей статье. Это справедливо как в отношении фотографической, так и в отношении визуальной поверхностной яркости. Поэтому и колор-индекс Галактики в том месте, где находится Солнце, определяется значением колор-индекса того суммарного звездного излучения, которое исходит от полюса Галактики.

Поскольку, согласно существующим данным (см., например, работу Seyfert'a [15]), цвет рукавов и остальной части внегалактических систем весьма заметно отличается друг от друга, то это дало бы возможность косвенного суждения о том, где расположено Солнце в Галактике, в рукаве или вне рукава*.

Цвет полного звездного излучения из полюсов Галактики мог бы быть легко определен, если бы мы знали цвета всех звезд до достаточно слабых величин. Хотя некоторые данные по этому воп-

* Вопросу о цвете Галактики посвящена также часть работы В. А. Домбровского, которая была закончена им до написания настоящей статьи и которая появится в печати в ближайшее время (эта работа В. А. Домбровского до сих пор не опубликована. *Ред.*).

росу имеются [16], мы все же далеки от обладания полными, а тем более точными сведениями.

Однако, если имеющиеся данные позволят определить хотя бы некоторую нижнюю границу для колор-индекса, уже это будет иметь большое значение.

Так, например, если будет установлено, что для общего звездного излучения полюсов $c > 0^m 50$, то тем самым вопрос, поставленный выше, решается, так как для рукавов наверняка $c < 0^m 50$. Как мы увидим, такое определение некоторой нижней границы для c вполне возможно.

Обозначим через i_k парциальную визуальную поверхностную яркость полюса Галактики, обусловленную звездами k -го спектрального типа, выраженную в звездах некоторой величины. Фотографическая поверхностная яркость, обусловленная теми же звездами, выраженная в звездах той же величины, будет равна $i_k \cdot 10^{-0.4c_k}$, где c_k — колор-индекс, соответствующий данному типу. Очевидно, что колор-индекс смешанного излучения будет равен:

$$c = -2.5 \lg \frac{\sum i_k 10^{-0.4 c_k}}{\sum i_k}. \quad (25)$$

Для определения нижней границы c мы поступаем следующим образом: возможны два предположения: 1) либо $c \geq 0^m 6$, либо 2) $c < 0^m 6$. Если справедливо первое предположение, то уже имеется нижняя граница колор-индекса, равная 0,6. Покажем, однако, что во втором предположении наблюдения позволяют также определить некоторую другую нижнюю границу. Для этого введем вместо i_k некоторые другие величины i'_k , которые равны i_k для спектральных типов В, А и F, и меньше i_k для поздних типов G, K, M. Очевидно, что

$$\frac{\sum i'_k 10^{-0.4 c_k}}{\sum i'_k} > \frac{\sum i_k 10^{-0.4 c_k}}{\sum i_k},$$

ибо среднее взвешенное значение величины $10^{-0.4 c_k}$, определенное левой частью, получается путем замены весов i_k для поздних спектральных типов (для которых колор-индекс больше 0,6, т. е. больше среднего взвешенного) меньшими весами. Поэтому, если введем величину c_1

$$c_1 = -2.5 \lg \frac{\sum i'_k \cdot 10^{-0.4 c_k}}{\sum i'_k} < -2.5 \lg \frac{\sum i_k \cdot 10^{-0.4 c}}{\sum i_k} = c, \quad (26)$$

т. е. c_1 будет нижней границей для c .

С другой стороны, данные HDC позволяют довольно точно определить значения i_k для типов В, А, F, так как для определения суммарных яркостей звезд этих типов в направлении полюса Галактики этот каталог можно считать достаточно полным. Небольшие поправки могут быть внесены путем использования данных подсчетов по BSD.

Мы использовали для этой цели статистику звезд HDC, данную Charlier [17], и подсчеты звезд в BSD, приведенные в предисловии ко второму тому этого каталога.

Что касается звезд типов G, K, M, то по отношению к ним HDC и даже BSD не может считаться полным. Поэтому мы не можем определить i_k для них, но мы можем, подсчитав суммарные яркости для более ярких звезд этих типов, содержащихся в этих каталогах, определить некоторые цифры i'_k , которые меньше i_k .

Таким образом, мы получили следующие значения i'_k для разных спектральных классов:

Sp	В	А	F	G	K	M
i'_k	1	4	5	12	7	0

звезд десятой визуальной величины с квадратного градуса.

Откуда по формуле (26) получилось $c_1 = 0^m 55$.

Таким образом, в первом предположении нижней границей c является 0.6, а во втором предположении — 0.55. Так как других предположений не может быть, то нужно принять, что

$$c > 0^m 55.$$

Это служит хотя и косвенным, но весьма сильным аргументом в пользу того, что Солнце не находится в рукаве Галактики.

Заметим, что вследствие малости селективного поглощения в направлении полюсов Галактики мы имели право в формуле (26) использовать нормальные цвета соответствующих спектральных классов.

§ 11. *Сравнение парциальных поверхностных яркостей для различных галактик.* Представляет значительный интерес вопрос о сравнении парциальных поверхностных яркостей, обусловленных звездами какого-либо физического типа во внешних галактиках и

в нашей Галактике, когда она наблюдается снаружи и под тем же углом, что и данная внешняя галактика. Такое предварительное сравнение нами произведено для одного случая, но мы не будем останавливаться здесь на этом вопросе, так как результат сравнения уже опубликован в другом месте [18].

§ 12. *Заключение.* Мы видим, что изучение поверхностных яркостей, обусловленных звездами нашей Галактики, приводит к ряду интересных выводов. Главные из них следующие: а) значительно меньшая концентрация темной материи у плоскости Галактики по сравнению со звездами, чем это принималось до сих пор, и б) желтый цвет того места Галактики, в котором расположено Солнце, когда это место наблюдается из внегалактического пространства.

Само собою разумеется, все данные настоящей работы, так же как ее выводы, являются предварительными. Нам хотелось только указать на новый путь исследования, который хотя и должен иметь ограниченное применение (так как подробные подсчеты звезд должны в принципе давать более точную картину), но весьма прост и до сих пор, по-видимому, был мало использован.

Астрономическая обсерватория
АН АрмССР
г. Ереван

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Фесенков, Астр. журнал, **22**, 271, 1945.
2. Van-Rhijn, Groningen Publ., No 43, 1929.
3. Lindblad, Handbuch der Astrophysik, Bd. 5, 1933.
4. Кукаркин (неопубликованная рукопись).
5. Oort, Ap. J., **91**, 273, 1940.
6. Henyey and Greenstein, Ap. J., **93**, 70, 1941.
7. Амбарцумян, ДАН, **44**, 244, 1944.
8. Амбарцумян, ДАН АрмССР, **1**, 9, 1944.
9. Hubble, Mt. Wilson Contr. No. 485, 1934.
10. Паренато, Астр. журнал, **17**, 1, 1940; **22**, 129, 1945.
11. Вашакидзе, Bull. Abast. Obs., **1**, 87, 1937.
12. Oort, Bull. Astr. Inst. Netherlands, **8**, 245, 1938.
13. Aller and Trumpler, PASP, **50**, 275, 1938.
14. Oort, Annales d'Astrophysique, **1**, 71, 1938.
15. Seyfert, Ap. J., **91**, 528, 1940.
16. Malmquist, Lund Med., No 37, 1927.
17. Charlier, Lund Med., No 34, 1926.
18. Амбарцумян, ДАН АрмССР, **3**, 39, 1945.

К ВОПРОСУ ОБ ОТНОСИТЕЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ СВЕТЛОЙ И ПОГЛОЩАЮЩЕЙ МАТЕРИИ В ГАЛАКТИКЕ*

(Представлено 27.VI 1946)

Если предположить, что в окрестностях Солнца звезды и поглощающая материя Галактики расположены плоскопараллельными слоями, то, введя коэффициент поглощения $\alpha(z)$ и макроскопический коэффициент излучения $\eta(z)$, являющиеся функциями расстояния z от плоскости симметрии Галактики, будем иметь следующие выражения для интенсивности (т. е. суммарной яркости звезд, приходящейся на один квадратный градус) для галактического полюса:

$$I\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\infty} \eta(z) e^{-\tau} dz, \quad (1)$$

а для галактического экватора:

$$I(0) = \int_0^{\infty} \eta(0) e^{-\alpha(0)s} ds = \frac{\eta(0)}{\alpha(0)}. \quad (2)$$

В формуле (1) величина τ представляет собою оптическое расстояние до плоскости Галактики. Поскольку значения τ малы по сравнению с единицей, мы получаем:

$$I\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\infty} \eta(z) dz = \eta(0) z_0,$$

где z_0 — эквивалентная полутолщина светящегося слоя в Галактике. Сравнивая (2) и (3), находим:

$$\frac{I\left(\frac{\pi}{2}\right)}{I(0)} = \alpha(0) z_0 = \tau_0, \quad (3)$$

* ДАН АрмССР, т. 4, 133, 1946.

т. е. величину, равную эффективной оптической полутолщине слоя, в котором расположены звезды. Определенная нами таким образом в другой, ныне печатающейся работе*, оптическая полутолщина слоя, в котором расположены звезды, оказалась равной 0,13.

Ряд новых подсчетов, произведенных нами, показал, что это значение не зависит существенно от тех или иных вариаций при экстраполяции данных Ван-Райна о числе звезд в разных широтах на слабые звезды.

С другой стороны, мы имеем возможность определить ту же оптическую полутолщину слоя, в котором расположены звезды, иным путем.

Для любой галактической широты b мы имеем в случае плоско-параллельных слоев:

$$I(b) = \int_0^{\infty} \eta(z) e^{-\frac{\tau}{\sin b}} \frac{dz}{\sin b}.$$

Для малых значений $\frac{\tau}{\sin b}$ мы имеем, пренебрегая под интегралом вторыми степенями этой величины,

$$\begin{aligned} I(b) &= \int_0^{\infty} \eta(z) \left(1 - \frac{\tau}{\sin b}\right) \frac{dz}{\sin b} = \int_0^{\infty} \frac{\eta(z) dz}{\sin b} - \frac{1}{\sin b} \int_0^{\infty} \eta(z) \tau \frac{dz}{\sin b} = \\ &= \frac{\eta_0 z_0}{\sin b} \left(1 - \frac{\bar{\tau}}{\sin b}\right). \end{aligned} \quad (4)$$

Эта формула применима лишь к высоким галактическим широтам, где $\bar{\tau}$ — среднее поглощение света звезд в направлении полюса.

С другой стороны, при отсутствии поглощения мы имеем бы:

$$I'(b) = \frac{\eta_0 z_0}{\sin b}. \quad (5)$$

Деля (4) на (5), получаем:

$$\frac{I(b)}{I'(b)} = 1 - \frac{\bar{\tau}}{\sin b}. \quad (6)$$

В частности

$$\frac{I\left(\frac{\pi}{2}\right)}{I'\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 1 - \bar{\tau}. \quad (7)$$

* См. статью „О поверхностных яркостях в Галактике“. *Ред.*

Вместе с тем из (4) имеем:

$$\frac{I(b)}{I\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\sin b} \frac{1 - \frac{\bar{\tau}}{\sin b}}{1 - \bar{\tau}}.$$

Поэтому

$$\sin^2 b \frac{I(b)}{I\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\sin b - \bar{\tau}}{1 - \bar{\tau}},$$

откуда

$$\bar{\tau} = \frac{\sin b - \sin^2 b \frac{I(b)}{I\left(\frac{\pi}{2}\right)}}{1 - \sin^2 b \frac{I(b)}{I\left(\frac{\pi}{2}\right)}}. \quad (8)$$

Сравнивая (8) с (7), находим:

$$\frac{I\left(\frac{\pi}{2}\right)}{I\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1 - \sin b}{1 - \sin^2 b \frac{I(b)}{I\left(\frac{\pi}{2}\right)}}. \quad (9)$$

Эта формула по существу совпадает с формулой (3) работы Б. Е. Маркаряна, печатающейся одновременно с настоящей статьей в „Докладах“*. Она справедлива для высоких галактических широт.

Мы видим, что формула Маркаряна эквивалентна формуле (4).

В работе Маркаряна на основании подсчетов Ван-Райна в высоких широтах определена по этой формуле средняя оптическая толщина, проходимая светом звезд $\bar{\tau}$, которая с точностью до величины второго порядка должна быть равна половине оптической полутолщины поглощающего слоя, т. е.

$$\bar{\tau} = \frac{\tau_0}{2}.$$

Поэтому полученные численные значения $\bar{\tau}$ позволяют судить также о значении τ_0 .

* ДАН АрмССР, 4, 129, 1946. Ред.

Данные работы Маркаряна показывают, что τ порядка 0.17, откуда $\tau_0 = 0.34$, что противоречит значению, определенному по первому методу.

Таким образом, данные о полных интенсивностях звезд в высоких галактических широтах дают по меньшей мере вдвое более высокое значение эквивалентной оптической полутолщины звездного слоя, чем сравнение полных интенсивностей в районе галактического полюса и галактического экватора.

В случае правильности значения $\tau_0 = 0.34$ мы должны заключить, что в среднем концентрация звезд около плоскости Галактики не ниже концентрации поглощающей материи. Если же $\tau_0 = 0.13$, мы должны заключить, что звезды сконцентрированы в среднем сильнее.

Вопрос о причинах этого расхождения нуждается в дальнейшем обсуждении*.

Считаю долгом выразить благодарность старшему научному сотруднику Астрономической обсерватории Академии наук АрмССР Б. Е. Маркаряну за помощь при составлении настоящей заметки.

Астрономическая обсерватория
Академии наук АрмССР
Ереван, 1946, июнь

* Точное решение этого вопроса до сих пор не дано. *Ред.*

ПОДСЧЕТЫ ВНЕГАЛАКТИЧЕСКИХ ТУМАННОСТЕЙ И ГАЛАКТИЧЕСКОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ*

(Представлено 18.IV 1947)

Изучение вопроса о характере связи диффузных туманностей с освещающими их звездами привело к гипотезе о клочковатом строении поглощающего слоя в галактике [1]. Возник вопрос о статистическом изучении природы отдельных неосвещенных облаков, составляющих поглощающий слой. Прежде всего желательным установить следующие три статистические характеристики: 1) среднее число поглощающих облаков в единице объема, 2) средняя оптическая толщина облака — ϵ , 3) средние линейные размеры облака.

Еще в 1940 году нами было показано [2], что одной из главных причин больших флуктуаций в числах внегалактических туманностей является клочковатая природа поглощающего слоя в нашей Галактике. Более того, оказалось, что данные об этих флуктуациях, получаемые из статистических подсчетов Hubble'a, дают возможность определить среднее значение оптической толщины одного поглощающего облака. Это значение было найдено равным 0^m27 .

Опубликованные Shapley [3] подробные подсчеты внешних галактик для южного полушария представляют с этой точки зрения значительный интерес.

Правда, эти подсчеты простираются только до 18^m0 и поэтому в большей степени подвержены влиянию местных уплотнений и скученности, чем подсчеты Hubble'a. Однако вместе с тем имеются два обстоятельства, которые делают анализ данных Shapley весьма целесообразным. Во-первых, эти подсчеты охватывают весьма значительную площадь неба и, во-вторых, итоги подсчетов даны в такой форме, что позволяют сравнивать между собой различные площадки на одном и том же снимке. Сравнивая между собой площадки, находящиеся на одном и том же снимке, мы, тем самым, устраняем систематические ошибки, которые меняются при переходе от снимка к

* ДАН АрмССР, 6, 105, 1947.

снимку. Кроме того, изучение колебаний чисел галактик при небольших взаимных расстояниях площадок (порядка 1—3 градуса) тем более интересно для нас, что при анализе подсчетов Hubble'a мы сравнивали площадки, находящиеся на несколько десятков градусов друг от друга.

В подсчетах Shapley даются числа галактик на каждый квадратный градус. Нами брались на каждом снимке только центральные девять площадок, для того, чтобы избежать фотометрической ошибки поля. Таким образом, использовались подсчеты, произведенные в пределах центральной части снимка в квадрате $3^\circ \times 3^\circ$. Для каждого снимка выводилось среднее число галактик \bar{N} и среднее квадратичное отклонение от вычисленного среднего $(\Delta N)^2$. Отсюда непосредственно вычислялся квадрат дисперсии σ^2 . Из последней величины вычитался квадрат той дисперсии, которая естественно должна существовать по закону Пуассона независимо от клочковатости поглощающего слоя в Галактике и получалась остаточная дисперсия σ_1^2 . Отсюда можно было получить относительное значение квадрата дисперсии

$$\rho = \frac{\sigma_1^2}{\bar{N}^2} \quad (1)$$

для каждого снимка.

При подсчетах мы, для получения однородных результатов, ограничились теми снимками, на которых они доведены до галактик слабее $17^m 8$ и анализ производился по отношению к числам всех галактик до указанной яркости включительно.

Всего были таким образом обработаны данные для 59 снимков. Результаты обработки приведены в следующей таблице, где даны: номер пластинки по Shapley, галактические координаты центра снимка и вычисленное значение ρ .

№	λ	β	ρ	$\ln(1+\rho)$	№	λ	β	ρ	$\ln(1+\rho)$
17219	274.1	-55.0	0.14	0.13	14219	286.9	-45.9	0.02	0.02
17088	264.2	-54.9	0.13	0.12	17150	257.3	-45.0	0.04	0.04
17121	255.2	-53.0	0.05	0.05	16299	280.0	-43.9	0.02	0.02
14268	285.0	-53.0	-0.05	0.05	17155	250.4	-43.8	0.21	0.18
14232	273.1	-50.3	0.11	0.10	17087	299.0	-41.7	-0.04	0.04
17222	264.0	-49.7	0.11	0.10	14395	261.0	-40.9	0.51	0.41
14265	247.7	-49.4	0.12	0.11	17198	268.5	-40.2	0.05	0.05
14329	293.5	-48.9	0.02	0.02	17194	272.8	-40.0	0.13	0.12
17144	256.3	-47.6	0.14	0.13	14325	285.7	-39.4	0.06	0.06
14213	283.8	-47.6	0.07	0.07	17187	243.0	-38.6	0.08	0.08

№		β	ρ	$\ln(1+\rho)$	№	λ	β	ρ	$\ln(1+\rho)$
14293	293.4	-38.6	0.08	0.08	14202	294.6	-23.8	0.61	0.48
14251	280.0	-37.4	0.30	0.26	14862	282.4	-22.7	0.09	0.09
16344	263.1	-36.3	0.08	0.08	17401	274.5	-21.6	0.82	0.60
16976	272.4	-35.0	1.20	0.79	17398	258.0	-21.5	0.17	0.16
16686	254.3	-34.4	0.06	0.06	16950	267.8	-20.4	0.30	0.26
14239	289.0	-34.0	0.14	0.13	17250	246.8	-20.2	0.11	0.10
14229	304.5	-33.5	0.09	0.09	17312	241.2	-19.6	0.07	0.07
16461	277.2	-31.7	0.10	0.10	16316	261.6	-18.2	0.07	0.07
14267	295.4	-31.6	0.05	0.05	16414	277.5	-17.6	0.32	0.28
17200	266.3	-31.5	0.08	0.08	16011	267.6	-16.0	0.23	-0.21
18629	283.9	-31.4	0.29	0.25	16452	271.3	-15.5	0.41	0.34
16945	275.2	-29.5	0.14	0.13	17391	249.9	-15.3	0.03	0.03
16315	255.9	-29.4	0.06	-0.06	17351	244.1	-14.5	0.06	0.06
17473	278.1	-26.3	0.59	0.46	16185	289.0	-14.0	0.22	0.20
16758	244.6	-26.2	0.13	0.12	16195	295.1	-13.4	0.10	0.10
17405	271.5	-25.9	-0.09	-0.09	16169	280.5	-13.3	0.12	0.11
14222	300.6	-25.8	0.33	0.29	16033	271.6	-10.6	0.05	0.05
14208	289.2	-25.5	0.27	0.24	16167	263.0	-8.9	-0.06	-0.06
14256	239.6	-25.3	0.09	0.09	16439	284.3	-4.3	-0.13	-0.12
14184	283.6	-24.9	0.50	0.41					

Перейдем к некоторым теоретическим расчетам и сравнению полученных значений ρ с результатами теории. Обозначим через ν_0 математическое ожидание числа поглощающих облаков в направлении на галактический полюс. Тогда математическое ожидание числа поглощающих облаков, пересекаемых лучом на галактической широте β , будет $\nu = \nu_0 \operatorname{cosec} \beta$. Реальное число облаков n в данном направлении β будет случайной величиной, с распределением Пуассона

$$P(n) = e^{-\nu} \frac{\nu^n}{n!}. \quad (2)$$

Если обозначить через $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ поглощение в звездных величинах, производимое этими облаками, то число галактик на 1 квадратный градус, наблюдаемое нами, будет в этом случае равно

$$N = N_0 \cdot 10^{-0.6(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n)},$$

где N_0 — число галактик, которое наблюдалось бы на 1 квадратный градус при отсутствии поглощения.

Принимая для всех облаков один и тот же закон распределения $\varphi(\varepsilon)$ значений оптических толщин (ε), мы после некоторых вычислений найдем следующее выражение для среднего значения N

$$\bar{N} = N_0 e^{-\nu(1-\varphi)}, \quad (3)$$

где

$$\Theta = \int 10^{-0.6\varepsilon} d\varphi(\varepsilon) \quad (4)$$

представляет собой математическое ожидание величины $10^{-0.6\varepsilon}$.

Точно так же можно показать, что

$$\overline{N^2} = N_0^2 e^{-\nu(1-\Theta)^2}. \quad (5)$$

Из (3) и (5) для дисперсии величины N , обусловленной клочковатостью поглощающей материи, находим:

$$\frac{\sigma_1^2}{\overline{N^2}} = \frac{\overline{N^2} - \overline{N}^2}{\overline{N^2}} = e^{\nu(1-\Theta)^2} - 1. \quad (6)$$

Сравнивая с (1), получим:

$$\ln(1 + \rho) = \nu(1 - \Theta)^2 \quad (7)$$

или

$$\nu_0 \operatorname{cosec} \beta \left[\int (1 - 10^{-0.6\varepsilon}) d\varphi(\varepsilon) \right]^2 = \ln(1 + \rho). \quad (8)$$

В частном случае, когда ε может принимать лишь одно возможное значение ε_0 , формула (8) приводится к

$$\nu_0 \operatorname{cosec} \beta \left[1 - 10^{-0.6\varepsilon_0} \right]^2 = \ln(1 + \rho). \quad (9)$$

С другой стороны произведение $\nu_0 \varepsilon_0$ представляет собой математическое ожидание оптической толщины в направлении галактического полюса и по Hubble-у

$$\nu_0 \varepsilon_0 = 0^m 25. \quad (10)$$

Из двух уравнений (9) и (10) мы можем определить ν_0 и ε_0 .

Заметим, что, согласно (9), величина $\ln(1 + \rho)$, полученная нами из подсчетов Shapley и содержащаяся в последнем столбце вышеприведенной таблицы, должна быть пропорциональна $\operatorname{cosec} \beta$. Однако мы видим, что полученные значения $\ln(1 + \rho)$ для данной широты подвержены большим флуктуациям. Для их устранения мы сгруппировали значения $\ln(1 + \rho)$ по различным широтным поясам и получили их средние значения. Результат приведен в нижеследующей таблице.

Значения $\overline{\ln(1 + \rho)}$, вычисленные здесь для зоны избегания, т. е. для последних двух зон, крайне ненадежны и не заслуживают никакого внимания, вследствие малости числа наблюдаемых галактик и вытекающей отсюда невозможности получения статистически ценных данных.

Интервал широт	$\overline{\ln(1+\rho)}$
50° — 56.9	0.07
40 — 49.9	0.10
30 — 39.9	0.16
20 — 29.9	0.21
10 — 19.9	0.10
0 — 9.9	-0.09

Для остальных же широт $\overline{\ln(1+\rho)}$ довольно регулярно возрастает с $\operatorname{cosec} \beta$ и по способу наименьших квадратов легко сосчитать значение коэффициента при $\operatorname{cosec} \beta$ в левой части формулы (9). Сопоставляя это значение с (10), мы найдем значения γ_0 и ε_0 . Оказалось, что для ε_0 получается

$$\varepsilon_0 = 0^m 23,$$

что несколько меньше значения, полученного нами в прежней работе.

При выводе величины ε_0 надо, однако, иметь в виду следующий источник ошибки. Дело в том, что значения N , наблюдаемые в двух близких друг от друга участках неба, не могут быть совершенно независимы, так как в этом случае некоторые из облаков, поглощающих свет галактик, могут быть общими для обоих участков. Следовательно, между значениями N для двух участков будет некоторая корреляция, убывающая с возрастанием расстояния между участками. Наши основные формулы (3), (5), (6) могут сравниваться с результатами подсчетов в выбранной совокупности направлений вообще лишь в том случае, когда числа N в этой совокупности направлений независимы между собой. Этому условию вполне удовлетворяет совокупность площадок Hubble-а. В случае же вычисления σ_1 на основании подсчетов в совокупности площадок, находящихся вблизи друг друга на одной пластинке, как это сделано в настоящей работе, вычисленное значение σ_1 может быть меньше, чем в том случае, когда частоты галактик на площадках независимы. Вследствие этого вычисленное значение ε_0 может оказаться меньше истинного. Однако этот вопрос заслуживает отдельного рассмотрения.

Бюраканская астрофизическая обсерватория

Академии наук АрмССР

Ереван, 1947, апрель.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. V. Ambarzumian and Sh. Gurdeladse, Bull. Abast. obs., **2**, 37, 1937.
2. В. Амбарцумян, Бюлл. Абаст. обс., **4**, 17, 1940.
3. Annals of Harvard Observatory, **105**, 137, 1937.

О КЛОЧКОВАТОЙ СТРУКТУРЕ МЕЖЗВЕЗДНОГО ПОГЛОЩАЮЩЕГО СЛОЯ*

Более десяти лет назад с несомненностью выявилось, что межзвездная поглощающая среда имеет очень нерегулярную, клочковатую структуру. В течение последних лет мы в Советском Союзе выполнили некоторую работу с целью более детального изучения структуры системы поглощающих облаков и получения некоторых числовых параметров, описывающих это разнообразие облаков.

Первый вопрос, требующий ответа, следующий: известно, что каждая светлая диффузная туманность, как правило, освещается некоторой звездой высокой светимости. Связаны эти звезды и соответствующие туманности генетически и динамически или эта связь случайная, обусловленная случайной встречей звезды и туманности во время их галактического движения, после которой они снова расходятся?

Чтобы ответить на этот вопрос, было решено сравнить с наблюдениями один весьма важный вывод, получаемый из гипотезы о случайной встрече.

Ясно, что каждая звезда может освещать вокруг себя только сферу определенного радиуса, в том смысле, что облако, расположенное внутри этой сферы, достигнет достаточного освещения, чтобы быть видимым, как яркая диффузная туманность. Очевидно, что радиус такой сферы будет пропорционален квадратному корню из светимости звезды.

Возьмем определенный объем V галактического пространства. В этом объеме будут наблюдаться звезды различных спектральных типов и светимостей. Представим себе сферы, освещаемые этими звездами. Зная функцию светимости и звездную плотность для каждого

* On the Patchy Structure of the Interstellar Absorbing Layer. Transactions of IAU, Vol. VII, 452, 1950. Статья представляет собой доклад, прочитанный на съезде Международного Астрономического Союза в Цюрихе 17 августа 1948 г. *Ред.*

спектрального класса, мы можем немедленно получить суммарный объем, освещаемый звездами каждого спектрального типа

$$O, B0, B1, B2-9, A, F, G, K, M.$$

В случае случайной связи туманностей с освещающими звездами, вероятность для любого облака быть освещаемым звездой некоторого типа, скажем типа А, будет равна полной сумме объемов, освещаемых всеми звездами типа А внутри рассматриваемого объема, деленной на весь объем V .

Мы в состоянии вычислить все эти вероятности. Если гипотеза о случайной встрече верна, тогда числа туманностей, освещаемых звездами различных типов, должны быть пропорциональны соответствующим вероятностям.

Сравнение вычисленных вероятностей с наблюдаемыми числами диффузных туманностей, освещаемых звездами различных типов, показало очень тесную пропорциональность. Поэтому мы можем заключить, что гипотеза о случайной встрече должна быть принята.

Эти соображения ведут также к другому важному последствию. Легко показать, что звезды всех типов вместе освещают только 1/2000 объема межзвездного пространства. Это означает, что туманность имеет вероятность около 1/2000 быть освещаемой. Отсюда непосредственно следует, что число всех облаков в доступной для наших наблюдений части Галактики почти в 2000 раз больше числа ярких диффузных туманностей.

Следуя этому ходу рассуждений, мы установили, что число космических облаков в 1 пс^3

$$n \cong 1/10\,000.$$

Если τ среднее поперечное сечение туманности, то число облаков, пересекаемых лучом вдоль пути l , будет равно $ln\tau$.

Если, далее, ε_0 средняя оптическая толщина, выраженная в звездных величинах, то полное поглощение, вызванное этими облаками, будет:

$$\Delta m = ln\tau\varepsilon_0 = al,$$

где a среднее поглощение на парсек.

Из общих данных о космическом поглощении мы знаем величину a (фотографическую или визуальную) и порядок величины поперечного сечения τ .

Поэтому, если мы предполагаем, что межзвездное поглощение в целом вызвано нашей системой облаков (или темных туманностей), мы можем вывести величину ε_0 .

Первое и очень грубое определение ε_0 показало, что она порядка $0^m 2$ или $0^m 3$ в фотографической области. Было ясно, что эта величина не находится в противоречии с нашими представлениями о средней прозрачности диффузных туманностей.

Было заключено, что поглощающий слой состоит из большого числа дискретных облаков, которые малы по сравнению с расстояниями между ними. Однако было желательным иметь другой, независимый и более точный, метод для определения ε_0 .

Подсчеты внегалактических туманностей, выполненные проф. Шэпли и д-ром Хабблом, привели к выводу, что числа туманностей ярче определенной величины на квадратный градус показывают значительные флуктуации. Мы показали, что даже для данной галактической широты эти флуктуации далеко превышают случайные флуктуации согласно закону Пуассона. На первый взгляд кажется, что это может быть приписано тенденции к сгущиванию, которая, конечно, существует и важность которой была подчеркнута Шэпли.

Однако только тенденция к сгущиванию не в состоянии объяснить главную часть флуктуаций. Это, в частности, ясно из следующего доказательства: когда мы разбиваем все небо на зоны по галактическим широтам и определяем флуктуации отдельно для каждой из этих зон, то относительная величина этих флуктуаций возрастает с убыванием галактической широты зоны.

Очевидно, однако, что случайные флуктуации в числах галактических поглощающих облаков на пути света, приходящего из различных внегалактических туманностей, будут вызывать дополнительные флуктуации в числах туманностей.

Остается теоретически исследовать, как эти флуктуации зависят от галактической широты b .

Имея эту цель в виду, вычислим:

$$\overline{(N_m - \bar{N}_m)^2} = \bar{N}_m^2 - \bar{N}_m^2,$$

где N_m число туманностей ярче некоторой величины m на квадратный градус. Это число N_m в отсутствии поглощения должно быть равным

$$N_m = N_0 10^{0.6m}.$$

Прозрачность облака есть $q = 10^{-0.4\varepsilon_0}$. Поэтому n облаков по лучу зрения ослабляют яркость туманностей в q^n раз. Наблюдаемое число туманностей, следовательно, должно быть

$$N_m = N_0 \cdot 10^{0.6(m - n\varepsilon_0)} = N_0 \cdot 10^{0.6m} q^{\frac{3}{2}n}.$$

Задача вычисления $\overline{N_m}$, таким образом, была сведена к вычислению $q^{\frac{3}{2}n}$. В то же время вычисление N_m^2 было сведено к вычислению q^3 . Используя закон Пуассона для вероятности числа n , мы имеем после некоторых преобразований:

$$\overline{N_m} = N_0 \cdot 10^{0.6m} e^{-n_b \left(1 - q \frac{3}{2}\right)}.$$

Здесь n_b — среднее число поглощающих облаков, пересекаемых лучом зрения на широте b .

В случае плоско-параллельных слоев облаков мы имеем:

$$n_b = n_{\pi/2} \operatorname{cosec} b.$$

Таким же путем получаем

$$\overline{N_m^2} = N_0^2 10^{1.2m} e^{-n_b (1 - q^3)}$$

$$\frac{(\overline{N_m} - \overline{N_m})^2}{\overline{N_m^2}} = e^{n_b (1 - q^3)^2} - 1 = e^{n_{\pi/2} \operatorname{cosec} b (1 - q^3)^2} - 1. \quad (1)$$

С другой стороны, мы имеем:

$$\tau_{\pi/2} = n_{\pi/2} \varepsilon_0, \quad (2)$$

где $\tau_{\pi/2}$ — оптическая полутолща галактического поглощающего слоя в направлении, перпендикулярном галактической плоскости. Согласно последнему определению Паренаго, $\tau_{\pi/2} = 0^m 32$.

Уравнения (1) и (2) определяют $n_{\pi/2}$ и ε_0 . Используя подсчеты Шэпли и Хаббла, мы вычислили значения

$$\frac{(\overline{N_m} - \overline{N_m})^2}{\overline{N_m^2}}$$

для различных широт и получили величину ε_0 порядка $0^m 25$.

Не следует забывать, что необходимо ввести поправку за дисперсию предельных величин различных пластинок и за другие наблюдательные условия. Эта поправка является отчасти неопределенной. Однако, тем не менее, несомненно, что ε_0 заключена между

$$0^m 20 < \varepsilon_0 < 0^m 30.$$

Из (2) ясно, что $n_{\pi/2}$ должно быть порядка единицы.

Проф. Кукаркин определил дисперсию фотоэлектрических избытков цвета внегалактических туманностей на различных широтах и

оттуда получил непосредственно средний избыток цвета одного отдельного облака равным $0^m 05$. Умножая эту величину на соответствующий множитель, он нашел для оптической толщи одного облака приближенное значение

$$\varepsilon_0 = 0^m 27.$$

Б. Е. Маркарян из Бюраканской обсерватории определил величину ε_0 из сравнения наблюдаемых флуктуаций в числах звезд, подсчитанных на низких широтах, с теорией флуктуаций чисел звезд на этих широтах, основанной на описанной выше модели слоя облаков. Его теория содержит слишком много алгебраических выкладок, чтобы быть приведенной здесь. Он получил тоже $\varepsilon_0 \cong 0^m 25$.

Мы можем заключить, что ε_0 действительно этого порядка, хотя не исключаем, что величина ε_0 может изменяться в различных областях нашей Галактики.

Теория флуктуаций суммарных яркостей звезд, содержащихся в квадратном градусе на галактическом экваторе, может принять очень простую и изящную форму. Функция распределения этой величины, которая есть не что иное, как интенсивность звездного компонента излучения Млечного Пути, удовлетворяет определенному функциональному уравнению.

При выводе этого уравнения я использовал принцип инвариантности, подобный принципу, введенному мною в теорию диффузного отражения от плоско-параллельных слоев. Точнее, мы использовали тот факт, что функция распределения остается неизменной, когда наблюдатель перемещается на расстояние Δr вдоль луча зрения.

Принцип дает следующее функциональное уравнение:

$$\Phi'(I) + \Phi(I) = \frac{1}{q} \Phi\left(\frac{I}{q}\right), \quad (3)$$

для функции распределения, когда I измеряется в некоторых удобных единицах.

Из уравнения (3) для среднеквадратичного отклонения интенсивности легко получить

$$\frac{(I - \bar{I})^2}{\bar{I}^2} = \frac{1 - q}{1 + q}. \quad (4)$$

К несчастью, мы не имеем в нашем распоряжении достаточного числа определений I в различных точках Млечного Пути, чтобы проверить решение уравнения (3) и формулу (4).

Несколько лет назад академик Шайн обратил внимание на слишком слабую корреляцию между избытками цвета В и О-звезд по оп-

ределениям Стеббинса и его сотрудников и яркостями соответствующих областей Млечного Пути.

Теория облакообразной структуры поглощающего слоя сразу объясняет это явление. Звезды списка Стеббинса имеют среднее расстояние около 1000 *парсек*, в то время как флуктуации яркости Млечного Пути вызваны, главным образом, облаками, находящимися на расстояниях 200—500 *парсек*.

Поэтому очертания облаков, ответственных за эти два явления, совершенно различны и корреляция должна быть слабой.

Рассматриваемая проблема связана также с газовыми облаками. При предположении, что межзвездный газ также имеет такую клочковатую структуру, д-р Мельников проанализировал кривую роста для межзвездных линий и получил дисперсию скоростей газовых облаков порядка 8 *км/сек*.

Д-р Лайман Спитцер рассказал мне, что данные В. С. Адамса о расщеплении межзвездных линий на несколько компонентов приводят к числу газовых облаков, пересекаемых лучом зрения, равному числу пылевых облаков, вычисленному из нашей теории. Он, следовательно, отождествляет две системы облаков. Из этого отождествления следует, что облака межзвездного газа должны быть сравнительно малых размеров (около 8—10 *парсек* в диаметре). Очень важно доказать этот вывод наблюдениями.

В связи с проблемой, рассмотренной в этом кратком отчете, большое количество наблюдательных работ выполняется в Абастуманской обсерватории под руководством д-ра Харадзе. Определяются показатели цвета многих тысяч звезд в избранных площадках, так же как и цвета многих внегалактических туманностей.

Однако для дальнейшего изучения структуры галактического поглощающего слоя очень важными должны быть фотоэлектрические данные о показателях цвета внешних галактик.

Бюраканская обсерватория, близ Еревана,
Армения, СССР

Обсуждение

Л. Спитцер (*младший*) отмечает, что очень важная работа, изложенная Амбарцумяном, разъяснила две основные проблемы в изучении межзвездной материи. Во-первых, отношение избирательного поглощения к общему, найденное из изучения внешних галактик, то же самое, что было получено многими специалистами для темной материи в галактической плоскости. Это устраняет противоречие, найденное

Стеббинсом некоторое время назад и подчеркнутое Сирсом. Во-вторых, близкое согласие между числом темных облаков на килопарсек, найденном Амбарцумяном тремя совершенно независимыми методами, и соответствующим числом газовых облаков на килопарсек, указанном наблюдениями Адамса, дает дополнительное подтверждение в пользу картины малых, отдельных, беспорядочно распределенных облаков газа и твердых частиц. Эта картина находится в заметном контрасте с прежней картиной об однородной межзвездной среде. Спитцер заключает, что в первом приближении средние характеристики межзвездных облаков — размеры, разделение и общая природа — теперь начинают быть хорошо установленными.

К ТЕОРИИ ФЛУКТУАЦИЙ В ВИДИМОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЗВЕЗД НА НЕБЕ*

§ 1. В в е д е н и е

Результаты звездных подсчетов показывают, что числа звезд до какой-либо определенной величины, приходящихся на один квадратный градус (или какой-либо другой стандартный телесный угол), испытывают значительные изменения, когда мы переходим от одной области неба к другой. При этом такие изменения бывают двух родов: во-первых, эти числа показывают более или менее плавную зависимость от галактической широты b и галактической долготы l , во-вторых, имеются неправильные колебания в числах звезд при переходе от одного участка неба к другому, с ним соседнему, причем эти колебания совершаются на протяжении всего нескольких градусов, а иногда нескольких десятков минут дуги и меньше. Плавные изменения первого рода, происходящие на протяжении больших участков неба, мы можем считать *регулярными*, зависящими от основных особенностей строения Галактики и положения в ней наблюдателя. Изменения второго рода, происходящие при перемещении на небольшое угловое расстояние, мы будем называть *флуктуациями в числах звезд*. Эти флуктуации в числах звезд обусловлены действием трех

* Сообщение Бюраканской обсерватории, **6**, 1951. Работа была опубликована со следующим предисловием автора:

„Как видно из приложенного в конце настоящей работы списка литературы, теория флуктуаций в видимом распределении звезд, вызываемых клочковатостью межзвездного поглощающего слоя, возникла и разработана в Советском Союзе. Она основана на развитых советскими астрономами представлениях о природе космического поглощения и пылевых туманностей. Оказалось, что с математической стороны при разрешении проблемы флуктуаций нам приходится в большинстве случаев иметь дело с цепями Маркова. Уравнения, получаемые при этом, во многих случаях подобны уравнениям, выведенным академиком Колмогоровым для некоторых типов стохастических процессов.

В настоящей работе прежние результаты работ автора и его учеников значительно расширены и рассмотрены некоторые новые задачи“. Бюракан, 1950, декабрь. *Ред.*

причин. Первая из них — это наличие естественных случайных флуктуаций, возникающих в распределении звезд, в проекции на небесную сферу, вследствие того, что такие случайные отклонения от средней плотности существуют и в самом пространственном распределении.

Вторая причина заключается в клочковатой структуре поглощающего слоя в Галактике и в обусловленных этой структурой флуктуациях величины космического поглощения.

Работы Маркаряна [5], а также многочисленных авторов, изучавших отдельные „темные туманности“, показали, что вторая из указанных причин, наряду с первой, играет существенную роль.

Наконец, третьей причиной флуктуаций следует считать наличие в Галактике звездных систем, входящих в нее в качестве ее составных частей — звездных скоплений и ассоциаций, т. е. таких групп звезд, одновременное присутствие которых в данной области неба не является следствием случайности, а обусловлено либо силами, связывающими членов группы между собой, либо же их общим происхождением. В некоторых случаях от этих групп можно отвлечься, поскольку благодаря своему характеру они легко распознаются (шарообразные скопления, многие открытые скопления), и соответствующие им числа звезд можно просто вычесть из наблюдаемого распределения, но в других случаях физические группы могут оказаться трудно отличимыми от случайных флуктуаций или от флуктуаций, возникающих в результате клочковатости поглощающего слоя. Поэтому построение полной теории случайных флуктуаций в видимом распределении может помочь нам также в изучении физических группировок, поскольку случайные флуктуации должны подчиняться определенным статистическим закономерностям. Изучению этих закономерностей и посвящена настоящая работа. При этом мы уделили основное внимание вопросу о флуктуациях одной величины, характеризующей видимое распределение звезд (или звезд какого-либо определенного физического типа, внегалактических туманностей или каких-либо других объектов). Такой величиной является та доля поверхностной яркости неба, которая обусловлена звездами (или соответственно звездами определенного типа, внегалактическими туманностями и т. д.). Таким образом, речь будет идти в основном о парциальных поверхностных яркостях, обусловленных суммарным излучением объектов данного типа.

Вопросу о регулярных изменениях этих поверхностных яркостей была посвящена одна из наших предыдущих работ [2]. Здесь же мы займемся вопросом о флуктуациях этих яркостей.

§ 2. Основные предположения

Мы будем считать в дальнейшем, что звезды распределены в Галактике плоско-параллельными слоями. Это означает, что вероятность встретить какую-либо звезду в объеме dV , взятом на расстоянии z от плоскости симметрии Галактики, равна $w(z) dV$. Таким образом, $w(z)$ есть среднее число звезд в единице объема. Точно так же предположим, что поглощающая материя сосредоточена в облаках, которые имеют линейные размеры, малые по сравнению с расстояниями между ними, и также распределены в виде плоско-параллельных слоев, так что вероятность встретить облако в объеме dV равна $v(z) dV$.

Функцию светимости $B(i)$, представляющую вероятность того, что наудачу взятая звезда имеет светимость меньшую, чем i , мы будем считать независимой от координат. Точно так же мы допустим, что „функция непрозрачности“ $F(\sigma)$, выражающая вероятность того, что оптическая толщина случайно взятого облака при пересечении его лучом, имеющим случайное направление и расположение, меньше σ , не зависит от координат. Всем поглощающим облакам мы припишем одно и то же поперечное сечение S_0 . Тогда вероятность того, что какой-либо луч на элементе пути ds встретит поглощающее облако, будет равна:

$$dp = v(z) S_0 dz.$$

Наряду с оптической толщиной σ одного поглощающего облака мы часто будем употреблять также величину, представляющую собой коэффициент прозрачности, определяемый соотношением

$$q = e^{-\sigma}.$$

§ 3. Внегалактические туманности

В случае внегалактических туманностей мы имеем то упрощающее обстоятельство, что совокупность светящихся объектов (галактик) расположена вне слоя поглощающих облаков. Поэтому флуктуации парциальных поверхностных яркостей, обусловленных совокупностью внешних галактик, вызываемые галактическим поглощением, совершенно независимы от флуктуаций тех же парциальных поверхностных яркостей, вызываемых реальными колебаниями в пространственном распределении и светимостях этих объектов. Поэтому представляется возможным сначала рассмотреть лишь флуктуации, вызываемые клочковатостью поглощающего слоя в Галактике.

Допустим поэтому, что совокупность внешних галактик обуславливает на значительном протяжении постоянную парциальную поверхностную яркость I_0 , которая наблюдалась бы нами при отсутствии поглощения. Колебания же *наблюдаемой* парциальной поверхностной яркости I зависят от колебаний суммарной оптической толщины τ_b , проходимой лучом на галактической широте b , поскольку

$$I = I_0 e^{-\tau_b}, \quad (3.1)$$

а, в свою очередь, τ_b представляет собой сумму случайного числа случайных величин — оптических толщин σ отдельных облаков.

Поэтому нас должен интересовать закон распределения величины τ_b или, в случае трудности его определения, значения математических ожиданий различных степеней величины $e^{-\tau_b}$.

Для разрешения этой задачи решим другую, вспомогательную задачу. Возьмем объект, находящийся в направлении полюса Галактики на расстоянии z от нас и найдем вероятность того, что луч от этого объекта пройдет оптическую толщину, меньшую τ . Эта вероятность будет зависеть также от z и мы обозначим ее через $u_z(\tau)$.

Сосчитаем величину $u_{z+dz}(\tau)$, т. е. вероятность того, что луч от более высокой точки $z + dz$ проходит оптическую толщину τ . Это может быть в двух случаях: или луч на пути от $z + dz$ до z не встречает ни одного облака, а на расстоянии от z до 0 проходит толщину τ или же на пути от $z + dz$ до z он проходит через одно облако, оптическая толщина которого σ , а на пути от z до 0 проходит оптическую толщину меньшую $\tau - \sigma$. При этом σ может иметь различные значения. Поэтому на основании теорем о сложении и умножении вероятностей будем иметь:

$$u_{z+dz}(\tau) = u_z(\tau) [1 - v(z) S_0 dz] + v(z) S_0 dz \int_0^{\tau} u_z(\tau - \sigma) dF(\sigma). \quad (3.2)$$

Отсюда получаем уравнение

$$\frac{du_z}{dz} = -v(z) S_0 \left[u_z(\tau) - \int_0^{\tau} u_z(\tau - \sigma) dF(\sigma) \right]. \quad (3.3)$$

Обозначим

$$\int_0^z v(z) S_0 dz = \nu(z), \quad (3.4)$$

где $\nu(z)$, очевидно, равно среднему числу облаков на пути луча, идущего параллельно оси z от 0 до z . Вместо z удобно рассматривать в качестве вспомогательного параметра $\nu = \nu(z)$ и вместо $u_z(\tau)$ писать $u_\nu(\tau)$. Тогда

$$\frac{du_\nu(\tau)}{d\nu} = -u_\nu(\tau) + \int_0^\tau u_\nu(\tau - \tau) dF(\tau). \quad (3.5)$$

Это и есть уравнение, которому удовлетворяет функция распределения $u_\nu(\tau)$. Нас будут интересовать значения этой функции на внешней границе слоя облаков, где ν примет некоторое наибольшее значение ν_0 . Мы видим, что функция распределения оптических толщин $u_{\nu_0}(\tau)$ не зависит от строения слоя облаков, т. е. от деталей поведения функции $\nu(z)$, дающей концентрацию облаков, а только от значения $\nu = \nu_0$, т. е. интеграла (3.4) на внешней границе слоя.

Поскольку решение уравнения (3.5) в общем случае (т. е. при произвольном виде функции F) нельзя представить в конечном виде, мы ограничимся прямым выводом из него нужных нам величин, т. е. математических ожиданий различных степеней величины $Q = e^{-\tau}$, представляющей собой коэффициент прозрачности суммарного слоя облаков, простирающегося по толщине от 0 до z .

Среднее значение поверхностной яркости

$$\bar{I} = I_0 \int e^{-\tau} du_{\nu_0}(\tau) = I_0 \bar{Q},$$

так же как и среднее значение k -той степени той же яркости

$$\bar{I}^k = I_0^k \int e^{-k\tau} du_{\nu_0}(\tau) = I_0^k \bar{Q}^k, \quad (3.6)$$

как мы видим, выражается через средние \bar{Q} и \bar{Q}^k .

Для вычисления этих величин помножим обе части (3.5) на $e^{-k\tau}$ и проинтегрируем по τ . Имеем после перестановки порядка интегрирования в правой части:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\nu} \int_0^\infty e^{-k\tau} u_\nu(\tau) d\tau &= - \int_0^\infty e^{-k\tau} u_\nu(\tau) d\tau + \\ &+ \int_0^\infty e^{-k\nu} dF(x) \int_0^\infty e^{-k\tau} u_\nu(\tau) d\tau \end{aligned}$$

и, поскольку из

$$\int_0^{\infty} e^{-k\tau} u_{\nu}(\tau) d\tau = \frac{1}{k} \left(1 - e^{-k\tau}\right) u_{\nu}(\tau) \Big|_0^{\infty} - \frac{1}{k} \int_0^{\infty} \left(1 - e^{-k\tau}\right) du_{\nu}(\tau),$$

а также из $u_{\nu}(\infty) = \int_0^{\infty} du_{\nu}(\tau) = 1$, следует, что

$$\int_0^{\infty} e^{-k\tau} u_{\nu}(\tau) d\tau = \frac{1}{k} \int_0^{\infty} e^{-k\tau} du(\tau).$$

Получаем

$$\frac{d}{d\nu} \int_0^{\infty} e^{-k\tau} du_{\nu}(\tau) = - \int_0^{\infty} e^{-k\tau} du_{\nu}(\tau) + \overline{e^{-k\tau}} \int_0^{\infty} e^{-k\tau} du_{\nu}(\tau), \quad (3.7)$$

где

$$\overline{e^{-k\tau}} = \int_0^{\infty} e^{-k\tau} dF(\sigma) = \overline{q^k}, \quad (3.8)$$

есть среднее значение k -той степени прозрачности одного облака. Сравнивая (3.7) с (3.6), получаем:

$$\frac{d}{d\nu} \overline{Q^k} = - (1 - \overline{q^k}) \overline{Q^k}. \quad (3.9)$$

Полученное дифференциальное уравнение для $\overline{Q^k}$ имеет решение

$$\overline{Q^k} = C e^{-\nu(1 - \overline{q^k})},$$

и так как при $\nu = 0$ должно быть $\overline{Q^k} = 1$, окончательно находим $\overline{e^{-k\tau}} = \overline{Q^k} = e^{-\nu(1 - \overline{q^k})}$

$$\overline{I_k} = I_0^k e^{-\nu(1 - \overline{q^k})}. \quad (3.10)$$

Эта формула справедлива для любого значения ν , в частности для границы слоя облаков в Галактике, где $\nu = \nu_0$

$$\overline{I_0^k} = I_0^k e^{-\nu_0(1 - \overline{q^k})}. \quad (3.11)$$

Мы вывели эту формулу для области близ полюса Галактики ($b = \frac{\pi}{2}$). Но, очевидно, что со статистической точки зрения нет прин-

ципальной разницы между характером явления в направлении на полюс Галактики и в направлении, соответствующем любой галактической широте. Вся разница будет лишь в том, что если для направления на полюс Галактики на границе слоя $\nu = \nu_0$, то в направлении с широтой b среднее число облаков, пересекаемых лучом до границы слоя облаков, будет

$$\nu = \frac{\nu_0}{\sin b}.$$

Поэтому для любого направления в Галактике мы имеем, согласно (3.10),

$$\bar{I}^k = I_0^k e^{-\frac{\nu_0}{\sin b}(1 - \bar{q}^k)}$$

Зная \bar{I}^k , мы легко можем вывести любые нужные нам величины. Прежде всего:

$$\bar{I} = I_0 e^{-\frac{\nu_0}{\sin b}(1 - \bar{q})}. \quad (3.12)$$

Далее, для среднего квадратичного отклонения имеем:

$$\overline{(I - \bar{I})^2} = \bar{I}^2 - \bar{I}^2 = I_0^2 \left(e^{-\frac{\nu_0}{\sin b}(1 - \bar{q}^2)} - e^{-\frac{2\nu_0}{\sin b}(1 - \bar{q})} \right). \quad (3.13)$$

Так как само значение I_0 непосредственно не определяется из наблюдений, то целесообразно в этом случае (так же как весьма часто и в дальнейшем) ввести относительное значение среднего квадрата отклонения:

$$\frac{\overline{(I - \bar{I})^2}}{\bar{I}^2} = e^{-\frac{\nu_0}{\sin b}(1 - \bar{q}^2) - 2(1 - \bar{q})} - 1 = e^{\frac{\nu_0}{\sin b}(1 - 2\bar{q} + \bar{q}^2)} - 1, \quad (3.14)$$

которое уже не содержит I_0 . Левая часть (3.14) может быть непосредственно получена из наблюдений. Наконец, (3.14) можно переписать в виде:

$$\frac{\overline{(I - \bar{I})^2}}{\bar{I}^2} = e^{\nu_0 \operatorname{cosec} b (1 - \bar{q})^2} - 1. \quad (3.15)$$

Уже на этом примере видно, что задачи рассматриваемого типа приводят для относительного значения среднего квадратичного отклонения к выражениям, совершенно необычным для флуктуационных задач, встречающихся в физике.

Однако заметим, что результат решения рассмотренной выше задачи трудно сравнить с наблюдениями, так как пока мы еще не имеем возможности непосредственно наблюдать суммарную звездную величину всех внешних галактик для какого-нибудь участка неба.

Между тем небольшое изменение в постановке задачи приводит, как это показано в следующем параграфе, к результатам, которые могут быть легко сравнены с наблюдениями.

§ 4. Флуктуации в числах внегалактических туманностей

Работы Шэпли и Хаббла содержат подсчеты чисел внегалактических туманностей до некоторых предельных величин на большом числе участков неба. Для сравнения этих данных с теоретическими выводами следует построить теорию флуктуаций в *числах* внегалактических туманностей, блеск которых превосходит некоторую определенную границу.

Как известно, число внегалактических туманностей на один квадратный градус ярче видимой величины m в каком-либо участке неба определяется формулой:

$$N = N_1 \cdot 10^{0.6m}. \quad (4.1)$$

Если поглощение, выраженное в звездных величинах и обусловленное поглощающими облаками в Галактике, обозначим через Δm , то

$$m = m_0 + \Delta m,$$

где m_0 — „исправленная“ для данного направления предельная видимая величина. Тогда

$$N = N_1 \cdot 10^{0.6\Delta m} \cdot 10^{0.6m_0}.$$

Мы можем принять, что для данного m_0 число N для всего неба (или для достаточно больших областей неба) должно быть постоянным, независящим от космического поглощения в Галактике. Это значит, что мы должны иметь:

$$N_1 \cdot 10^{0.6\Delta m} = N_0 = \text{const.}$$

Откуда

$$N_1 = N_0 \cdot 10^{-0.6\Delta m}. \quad (4.2)$$

Но поглощение Δm выражается через оптическую толщину, проходящую лучом, следующим образом:

$$\Delta m = \frac{Mod}{0.400} \tau = 1.086 \tau.$$

Поэтому

$$N_1 = N_0 \cdot 10^{-\frac{3}{2} \text{Mod } \tau} = N_0 e^{-\frac{3}{2} \tau}. \quad (4.3)$$

Вводя (4.3) в (4.1), находим:

$$N = N_0 e^{-\frac{3}{2} \tau} 10^{0,6 m}. \quad (4.4)$$

Поэтому вычисление средних значений различных степеней N (при заданной предельной величине m) сводится к вычислению средних значений различных степеней величины $e^{-\frac{3}{2} \tau}$. Таким образом, мы приходим к задаче, которая была разобрана в предыдущем параграфе, с той разницей, что там мы вычисляли средние значения различных целых степеней $e^{-\tau}$, а здесь нам нужны средние значения целых степеней $e^{-\frac{3}{2} \tau}$. Сравнивая (4.4) с (3.1) и используя (3.10), мы получаем отсюда:

$$\overline{N^k} = N_0^k e^{-\nu(1 - \overline{q^{3/2} k})} \cdot 10^{0,6 km}. \quad (4.5)$$

Исходя из (4.5), для относительного значения среднего квадратичного отклонения находим:

$$\frac{(\overline{N - \bar{N}})^2}{\bar{N}^2} = \frac{\overline{N^2}}{\bar{N}^2} - 1 = e^{\nu_0 \operatorname{cosec} b} \overline{(1 - q^{3/2})^2} - 1. \quad (4.6)$$

Определяя из наблюдений относительное значение среднего квадратичного отклонения на данной галактической широте, мы тем самым получаем возможность вычисления значения показателя в правой части уравнения (4.6), т. е.

$$\frac{\nu_0 \overline{(1 - q^{3/2})^2}}{\sin b}.$$

Производя эти вычисления для разных галактических широт, мы можем произвести различные определения одной и той же величины

$$f_2 = \nu_0 \overline{(1 - q^{3/2})^2}. \quad (4.7)$$

Окончательное значение f_2 должно быть выбрано путем осреднения. Наиболее удобным способом определения f_2 является состав-

ление эмпирического графика зависимости $\log \left[\frac{\bar{N}^2}{N^2} - 1 \right]$ от $\operatorname{cosec} b$. Согласно (4.6) эта зависимость должна быть прямолинейная и f_2 определяется из углового коэффициента соответствующей прямой.

С другой стороны, на основании (4.5),

$$\bar{N} = N_0 e^{-\gamma_0 \operatorname{cosec} b \overline{(1 - q^{3/2})}} 10^{0.6 m}, \quad (4.8)$$

откуда

$$\log \bar{N} = \log N_0 - \gamma_0 \operatorname{cosec} b \overline{(1 - q^{3/2})} + 0.6 m.$$

Сопоставляя значения \bar{N} для разных широт b , мы определяем из графика зависимости $\log \bar{N}$ и $\operatorname{cosec} b$ значение углового коэффициента

$$f_1 = \gamma_0 \overline{(1 - q^{3/2})}. \quad (4.9)$$

Найдя, таким образом, из наблюдений f_1 и f_2 , мы тем самым будем иметь определенные статистические характеристики совокупности поглощающих облаков. Однако это не дает еще возможности найти отдельно значения γ_0 , $\overline{q^{3/2}}$ и $\overline{q^3}$. Только имея из каких-либо данных еще одно соотношение между этими тремя величинами, мы можем определить каждую из них.

Допустим на одну минуту, что значения q для разных поглощающих облаков мало отличаются от среднего значения $\bar{q} = q_0$ (т. е., что дисперсия q очень мала).

Тогда можно написать приближенно

$$f = \gamma_0 (1 - q_0^{3/2})^2 \quad (4.10)$$

$$f_1 = \gamma_0 (1 - q_0^{3/2}). \quad (4.11)$$

В таком случае, зная численные значения f_1 и f_2 , можем вычислить γ_0 и q_0 . Например, мы найдем, что

$$1 - q_0^{3/2} = \frac{f_2}{f_1},$$

откуда

$$q_0^{3/2} = 1 - \frac{f_2}{f_1}. \quad (4.12)$$

На самом же деле, однако, вследствие наличия дисперсии в q

$$\overline{(1 - q^{3/2})^2} > \overline{(1 - q^{3/2})}^2.$$

Поэтому

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{(1 - q^{3/2})^2}{(1 - q^{3/2})} > 1 - q^{3/2},$$

т. е.

$$\overline{q^{3/2}} > 1 - \frac{f_2}{f_1},$$

т. е. определенное выше значение $q_0^{3/2}$ является на самом деле лишь нижней границей для величины $\overline{q^{3/2}}$.

Несмотря на это, вычисление q_0 на основании (4.12) должно дать представление о порядке величины встречающихся среди облаков значений коэффициента прозрачности. Идя по этому пути, мы получили для q_0 , используя подсчеты Хаббла, $q_0 = 0.78$ и, согласно данным Шэпли, $q_0 = 0.81$.

Для того же, чтобы отдельно определить γ_0 и какое-либо из средних значений q , нужно использовать дополнительные данные. Такими данными могут, в частности, служить звездные подсчеты, на анализе которых мы остановимся в следующих параграфах.

Само собой разумеется, что наряду с флуктуациями, вызываемыми изменениями в поглощении, должны существовать также и естественные флуктуации в числах внегалактических объектов, обусловленные случайными колебаниями их чисел в пространстве. Совместный учет обоих этих факторов может быть произведен без особого труда.

Для этого мы должны рассматривать введенные выше значения N , вычисляемые, согласно формуле (4.4), как средние значения по отношению к возможным естественным флуктуациям чисел внегалактических туманностей, при заданном значении случайной переменной τ .

Поэтому вероятность того или иного значения фактически наблюдаемого числа n внегалактических туманностей будет определяться в виде интеграла от произведения вероятности этого значения n при заданном N (которое зависит от τ) на плотность вероятности различных значений τ . Иными словами:

$$P(n) = \int P_{N(\tau)}(n) du, (\tau), \quad (4.13)$$

где $P_{N(\tau)}(n)$ есть вероятность значения n при заданном N (или τ). Согласно формуле Пуассона,

$$P_{N(\tau)}(n) = e^{-N(\tau)} \frac{[N(\tau)]^n}{n!}.$$

Подставляя это выражение в (4.13), мы получаем для математических ожиданий первой и второй степеней n :

$$\bar{n} = \sum P(n) n = \int \sum n P_{N(\tau)}(n) du_v(\tau) = \int N du_v(\tau) = \bar{N} \quad (4.14)$$

$$\bar{n}^2 = \sum P(n) n^2 = \int \sum n^2 P_{N(\tau)}(n) du_v(\tau) = \int (N^2 + N) du_v(\tau) = N^2 + \bar{N}, \quad (4.15)$$

так как при законе Пуассона имеем, как обычно,

$$\sum n^2 P_{N(\tau)}(n) = [N(\tau)]^2 + N(\tau). \quad (4.16)$$

Величины \bar{N} и $\overline{N^2}$ в формулах (4.14) и (4.15) должны быть внесены из (4.5). Из этих формул непосредственно получаем:

$$\overline{(n - \bar{n})^2} = \bar{n}^2 - \bar{n}^2 = \overline{N^2} + \bar{N} - \bar{N}^2 = \overline{(N - \bar{N})^2} + \bar{N}, \quad (4.17)$$

т. е. средний квадрат отклонений в данном случае равен сумме средних квадратов отклонений, обусловленных двумя рассматриваемыми причинами. Так и должно было получиться, поскольку эти причины действуют независимо друг от друга.

Для относительного значения среднего квадратичного отклонения мы, в результате, вместо (4.6) найдем:

$$\frac{\overline{(n - \bar{n})^2}}{\bar{n}^2} = e^{\gamma_0 \operatorname{cosec} b (1 - q^{3/2})^2} - 1 + \frac{1}{N_0} e^{\frac{\gamma_0}{\sin b} (1 - q^{3/2})} 10^{-0.6 m}. \quad (4.18)$$

При убывании галактической широты последний член полученного выражения растет быстрее, чем первый. Когда для подсчетов взяты достаточно большие площадки на высоких широтах, им можно пренебречь, так как N_0 велико. Однако при убывании b он становится в конце концов больше первого члена и им нельзя пренебрегать. Иными словами, на самых низких галактических широтах случайные колебания в числах туманностей играют большую роль, чем колебания в прозрачности поглощающего слоя.

§ 5. Флуктуации поверхностной яркости Млечного Пути

Для анализа флуктуаций поверхностной яркости Млечного Пути мы сделаем сначала допущение, что эти флуктуации вызываются только флуктуациями в распределении поглощающих облаков. Что

же касается естественных пространственных флуктуаций в распределении самих звезд, то ими мы будем пренебрегать. Такое пренебрежение справедливо, когда число звезд весьма велико по сравнению с числом облаков и если вместе с тем по сравнению с числом облаков велико число звезд наивысшей светимости. На самом деле это последнее условие не выполняется. Поэтому нам нужно будет учесть в дальнейшем и влияние флуктуаций в числе звезд. Но пока, как выше указывалось, мы будем учитывать лишь влияние дискретности структуры поглощающего слоя.

Пусть мы имеем слой, в котором равномерно распределены поглощающие облака. Мы уже упоминали, что эту равномерность следует понимать в том смысле, что вероятность встретить облако в элементарном объеме dV равна $v dV$, где v — постоянная. Пусть $\varphi(q)$ есть вероятность того, что луч, случайно ориентированный в пространстве, испытает при прохождении через облако такое поглощение, что его первоначальная интенсивность помножится на множитель (коэффициент прозрачности облака), меньший, чем q . Возможность различных значений коэффициента прозрачности всего облака, как целого, связана не только с тем, что луч может пройти через облако в разных местах и в разных направлениях, но и с тем, что сами облака могут быть различны. Однако мы допустим, как и раньше, что „функция прозрачности“ $\varphi(q)$, определяющая распределение вероятностей возможных значений q , одинакова повсюду внутри слоя. В этом смысле слой облаков будем считать однородным. Каждому значению коэффициента прозрачности q соответствует такое значение σ оптической толщины облака вдоль рассматриваемого луча, что

$$q = e^{-\sigma}. \quad (5.1)$$

Очевидно, что между функцией $\varphi(q)$ и ранее введенной функцией $F(\sigma)$ существует простая связь

$$\varphi(e^{-\sigma}) = 1 - F(\sigma).$$

Пусть совокупность звезд, дискретностью распределения которых мы пока пренебрегаем, определяет собой некоторый макроскопический объемный коэффициент излучения η . Тогда интенсивность луча, идущего к наблюдателю и расположенного целиком внутри слоя, будет:

$$I = \int_0^{\infty} e^{-t(s)} \eta ds, \quad (5.2)$$

где $t(s)$ есть случайная переменная, равная суммарной оптической

толщине всех облаков, встречающихся на пути луча от наблюдателя ($s = 0$) до точки s :

$$t(s) = \sum \sigma_i.$$

Интеграл (5.2) дает интенсивность луча, идущего параллельно плоскости Галактики. Само собой разумеется, что трудно говорить о реальной однородности слоя облаков и звезд вдоль всего бесконечного луча. Однако легко видеть, что существенным является лишь требование о сохранении условий однородности только до достаточно больших оптических расстояний, так как более отдаленные части луча вследствие значительного поглощения будут мало влиять на значение интеграла (5.2).

Задача заключается теперь в том, чтобы определить функцию распределения интенсивности, т. е. такую функцию $\Psi(I)$, которая дает вероятность того, что интенсивность луча будет меньше данного значения I . Таким образом, мы здесь встречаемся с задачей о распределении значений определенного интеграла, под знаком которого находится функция, принимающая случайные значения. Уравнение для функции $\Psi(I)$ легко получить, если воспользоваться следующим принципом инвариантности: *вследствие однородности (в макроскопическом смысле) слоя поглощающих облаков функция $\Psi(I)$ не изменится, если наблюдатель передвинется вдоль луча в том или ином направлении на конечный отрезок*. При этом следует разъяснить, что фактически для каждого конкретного случая при таком передвижении наблюдателя интенсивность изменится, но функция распределения вероятностей $\Psi(I)$ останется неизменной. Этот принцип справедлив только потому, что луч проходит весь свой бесконечный путь в однородной среде. Выше указывалось, что существование границы Галактики на конечном расстоянии от наблюдателя нарушает это условие однородности. Но из-за наличия поглощения даже значительные отклонения от однородности на больших расстояниях от наблюдателя скажутся уже сравнительно мало (грубо говоря, по той же причине, по которой распределение плотностей и температур в глубоких слоях Солнца практически несущественно для распределения интенсивности по диску Солнца).

Для вывода нужного нам уравнения, из которого будет определяться функция распределения $\Psi(I)$, мы поставим сначала следующий вопрос: дано, что

$$\int_{\Delta s}^{\infty} e^{-[t(s) - t(\Delta s)]} \eta ds,$$

имеет значение, меньшее, чем I . Какие значения и с какими вероятностями примет в этом случае интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-t(s)} \eta ds,$$

выражающий ту же интенсивность, но для наблюдателя, отодвинутого назад на расстояние Δs . При этом в первом из этих интегралов $t(\Delta s)$ есть оптическая толщина отрезка от 0 до Δs . Очевидно, что с вероятностью $1 - \kappa \Delta s$ будут возможны значения, меньшие

$$I + \eta \Delta s.$$

При этом $\kappa \Delta s$ есть вероятность встретить на отрезке одно облако. Но, с другой стороны, с вероятностью $\kappa \Delta s d\varphi(q)$ существует возможность, что на отрезке $(0, \Delta s)$ встретится одно облако с прозрачностью, заключенной в пределах между q и $q + dq$, и тогда интенсивность в точке $s = 0$ будет меньше, чем qI . При этом надо иметь в виду всевозможные случаи, когда q находится в различных интервалах.

Поэтому, если мы спросим, какова вероятность неравенства

$$\int_0^{\infty} e^{-t(s)} \eta ds < X,$$

если вероятность неравенства $\int_{\Delta s}^{\infty} e^{-[t(s) - t(\Delta s)]} \eta ds < 1$ равна $\Psi(I)$, то

следует ответить, что она согласно теоремам сложения и умножения вероятностей равна

$$(1 - \kappa \Delta s) \Psi(X - \eta \Delta s) + \kappa \Delta s \int \Psi\left(\frac{X}{q}\right) d\varphi(q).$$

При этом мы отбрасываем члены второго и более высокого порядка, связанные с тем, что на промежутке Δs могут встретиться два (или больше) облака, поскольку в дальнейшем при $\Delta s \rightarrow 0$ они потеряют свое значение.

В силу принципа инвариантности мы можем считать, что найденная вероятность равна $\Psi(X)$. Отсюда получаем равенство:

$$\Psi(X) = (1 - \kappa \Delta s) \Psi(X - \eta \Delta s) + \kappa \Delta s \int \Psi\left(\frac{X}{q}\right) d\varphi(q).$$

Написав в том же приближении

$$\Psi(X - \eta \Delta s) = \Psi(X) - \eta \Delta s \Psi'(X)$$

и произведя сокращение, получаем

$$\Psi(X) + \frac{\eta}{z} \Psi'(X) = \int \Psi\left(\frac{X}{q}\right) d\varphi(q). \quad (5.3)$$

Введем вместо X , означающего некоторое значение интенсивности, новую переменную y

$$X = \frac{\eta}{z} y. \quad (5.4)$$

Тогда уравнение (5.3) примет вид:

$$\Psi(y) + \Psi'(y) = \int \Psi\left(\frac{y}{q}\right) d\varphi(q). \quad (5.5)$$

Величина y является той же интенсивностью, выраженной в единицах, равных $\frac{\eta}{z}$. Введя плотность вероятности для величины y

$$f(y) = \Psi'(y) \quad (5.6)$$

и продифференцировав (5.5), найдем:

$$f(y) + f'(y) = \int f\left(\frac{y}{q}\right) \frac{d\varphi(q)}{q}. \quad (5.7)$$

Из этого уравнения легко найти все математические ожидания μ_n различных степеней интенсивности y , выраженные через математические ожидания \bar{q}^n различных степеней коэффициента прозрачности q . Действительно, помножив (5.7) на y^n , интегрируя от 0 до ∞ по y и, принимая во внимание, что $f(y)$ в бесконечности весьма быстро стремится к нулю, а также переставив в правой части полученного равенства порядок интегрирования, после некоторых переделок получим рекуррентное соотношение:

$$\mu_n = \frac{n\mu_{n-1}}{1 - \bar{q}^n}. \quad (5.8)$$

Отсюда, в частности, имеем:

$$\bar{y} = \mu_1 = \frac{1}{1 - \bar{q}}. \quad (5.9)$$

Что касается относительного значения среднего квадрата отклонения, то для него получаем:

$$\frac{\overline{(y - \bar{y})^2}}{\bar{y}^2} = \frac{\bar{y}^2}{\bar{y}^2} - 1 = \frac{(1 - \bar{q})^2}{1 - \bar{q}^2}. \quad (5.10)$$

Особенно простой вид принимает выражение (5.10) в том случае, когда все поглощающие облака имеют один и тот же коэффициент прозрачности q . Тогда:

$$\frac{(\overline{y - \bar{y}})^2}{\bar{y}^2} = \frac{1 - q}{1 + q}. \quad (5.11)$$

Из (5.11) видно, что, имея из наблюдений относительное значение среднего квадратичного отклонения от средней интенсивности в Млечном Пути, мы можем определить q в этом предположении. На самом деле величина q имеет определенную дисперсию. Поэтому значение q , определенное из (5.11), как это видно из (5.10), будет соответствовать некоторому среднему значению q , но при этом не просто среднему арифметическому или среднему квадратичному.

Во всяком случае, однако, можно, на основании (5.10), сказать, что

$$\frac{(\overline{y - \bar{y}})^2}{\bar{y}^2} = \frac{1 - 2\bar{q} + \bar{q}^2}{1 - \bar{q}^2} > \frac{1 - 2\bar{q} + \bar{q}^2}{1 - \bar{q}^2} = \frac{1 - \bar{q}}{1 + \bar{q}}, \quad (5.12)$$

т. е. если q_0 есть вычисленное на основании (5.11) значение q , то

$$\frac{1 - q_0}{1 + q_0} > \frac{1 - \bar{q}}{1 + \bar{q}},$$

откуда следует, что

$$q_0 < \bar{q},$$

т. е. вычисленное на основании (5.11) значение q меньше, чем математическое ожидание.

Надо заметить, что при сравнении с наблюдениями следует учитывать, что полученные формулы относятся только к прямому свету звезд. Между тем непосредственно наблюдаемая и измеряемая поверхностная яркость Млечного Пути включает в себя также и галактический рассеянный свет, т. е. свет звезд, рассеиваемый совокупностью пылевых облаков. Только в том случае, когда поверхностная яркость получается посредством суммирования блеска отдельных звезд, получаемые формулы применимы прямо. Однако можно наметить также путь учета галактического рассеянного света.

§ 6. Учет рассеянного галактического света

В рамках сделанных выше предположений о том, что числа звезд даже наивысшей светимости велики по сравнению с числом

поглощающих облаков и о плоско-параллельных слоях, можно принять, что общая освещенность в каждой точке плоскости Галактики одна и та же.

Правда, интенсивность света, идущего из различных направлений, будет разная, вследствие наличия флуктуаций, но в результате интегрирования по всем направлениям эти флуктуации сгладятся. Если поглощающие облака освещены одинаково, то поверхностная яркость каждого из них будет равна постоянной величине B , умноженной на некоторый коэффициент диффузного отражения r в направлениях, лежащих в плоскости Галактики. Итак, каждое из облаков будет вносить дополнительную интенсивность rB , причем вообще значение r будет различно для различных облаков.

Русаков показал, что учет рассеянного света может быть произведен наиболее простым образом, если мы примем, что r и q постоянны.

Тогда доходящая до нас интенсивность n -го облака, расположенного на луче зрения, будет, вследствие поглощения, сведена к

$$rBq^{n-1}$$

и, суммируя, мы найдем для рассеянного света

$$I_{\text{рас}} = rB (1 + q + q^2 + \dots) = \frac{rB}{1 - q}.$$

Эта интенсивность, прибавляясь к прямому свету звезд, будет во всех случаях одна и та же и поэтому приведет к уменьшению размеров флуктуаций в яркости Млечного Пути.

Однако мы выше видели, что необходимо учесть различие значений q для различных облаков. Точно так же могут отличаться друг от друга значения r .

Задача может быть решена, если будет задан закон распределения величин r и q . Не ставя вопрос в столь общем виде, мы можем ограничить себя предположением, что r пропорционально $1 - q$

$$r = r_0 (1 - q). \quad (6.2)$$

Тогда принцип инвариантности сразу дает ответ на вопрос о возможных интенсивностях рассеянного света. Пусть интенсивность некоторого луча рассеянного света в некоторой точке равна I_0 . Пройдя через очередное облако, его интенсивность вследствие ослабления и прибавления отраженного света станет равной

$$I_1 = qI_0 + r_0 (1 - q) B.$$

Написав это равенство в виде:

$$I_1 - r_0 B = q(I_0 - r_0 B),$$

мы приходим к выводу, что абсолютное значение величины $I - r_0 B$ после прохождения каждого облака помножается на q , т. е. среднее значение $I - r_0 B$ вообще убывает, что противоречит принципу инвариантности. Только если

$$I - r_0 B = 0,$$

оно останется неизменным. Отсюда следует, что с вероятностью, равной единице

$$I = r_0 B, \quad (6.3)$$

т. е. и в этом случае мы не будем иметь никаких флуктуаций в поверхностных яркостях рассеянного света.

В дальнейшем, однако, следует учесть, что освещенность облаков должна быть на самом деле разной. Причиной этого является то, что наше предположение о том, что звезд даже самых высоких светимостей много по сравнению с числом облаков, является весьма грубым. Уже тот факт, что одни из облаков наблюдаются нами в виде светлых (освещенных) туманностей, а другие лишь как темные, говорит о необходимости более строгого подхода к этому вопросу.

§ 7. Решение уравнения

Возвращаясь к уравнению (5.7), мы должны отметить, что в частном случае, когда дисперсия в прозрачностях q настолько мала, что ею можно пренебречь, оно допускает точное решение в виде ряда. Если q имеет только одно значение q_0 во всех случаях, то $\varphi(q)$ равно нулю для значений q между 0 и q_0 и равно единице, начиная от q_0 до единицы. Поэтому уравнение (5.7) в этом случае получает вид:

$$f(y) + f'(y) = \frac{1}{q_0} f\left(\frac{y}{q_0}\right). \quad (7.1)$$

Его решение имеет вид:

$$f(y) = C_0 \left[e^{-y_0} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{y}{q_0^i}}}{q_0^i \left(1 - \frac{1}{q_0}\right) \left(1 - \frac{1}{q_0^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{q_0^i}\right)} \right], \quad (7.2)$$

где C_0 должно быть определено из условия нормирования:

$$\int_0^1 f(y) dy = 1.$$

Отсюда легко получаем:

$$C_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{q_0}\right) \left(1 - \frac{1}{q_0^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{q_0^i}\right)}. \quad (7.3)$$

Это решение было впервые дано в работе Русакова.

§ 8. Обобщение метода поверхностных яркостей

Выше мы подвергли анализу флуктуации в поверхностных яркостях. Но поверхностная яркость является лишь одним из параметров, характеризующих звездное поле в данной точке небесной сферы. Вообще, для каждой точки неба звездное поле характеризуется распределением приходящихся на один квадратный градус звезд по видимым величинам. Оно может, в частности, характеризоваться функцией $N(m)$, дающей число звезд до величины m на единицу телесного угла или же функцией $A(m)$, дающей число звезд от $m - \frac{1}{2}$ до $m + \frac{1}{2}$ в единице телесного угла. Величина поверхностной яркости I является суммой видимых яркостей звезд в единице телесного угла

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} 10^{-0.4m} A(m) dm, \quad (8.1)$$

т. е. одним из значений функций $a(k)$, получаемой из $A(m)$ путем преобразования Лапласа:

$$a(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-km} A(m) dm. \quad (8.2)$$

Если трудно подвергнуть непосредственному анализу флуктуации значений $A(m)$, то возникает вопрос: нельзя ли подвергнуть изучению флуктуации $a(k)$ вообще, а не только одно из значений этой функции, т. е. I . Иными словами, нельзя ли провести изучение флуктуаций такой функции, задание которой вполне эквивалентно заданию $A(m)$? Тем самым вопрос о флуктуациях в звездном поле будет поставлен во всей широте, а не узко, как это было до сих пор, пока мы ограничивались изучением флуктуаций лишь одного параметра (8.1).

Оказывается, что возможность хотя бы частичного исследования этих флуктуаций имеется. Заметим, что при решении задачи мы бу-

дем исходить из тех же предположений, что и раньше, в частности, из однородности как слоя облаков, так и слоя звезд в плоскости Галактики.

Основой нашего исследования будет служить первое [интегральное уравнение звездной статистики, написанное в виде:

$$N(m) = \int_{-\infty}^{\infty} D(m-M) \Phi(M) dM, \quad (8.3)$$

где $\Phi(M)$ есть функция светимости, так, что $\Phi(M) dM$ есть вероятность того, что взятая наудачу в пространстве звезда имеет абсолютную величину, заключенную между M и $M + dM$, а $D(x)$ есть функция распределения видимых модулей расстояний, т. е. $D(x)$ равно числу звезд, видимые модули расстояний которых меньше x . Под *видимым модулем расстояния* мы подразумеваем полную разность $m - M$, из которой не исключено поглощение, в отличие от исправленного модуля расстояния, который равен

$$x_0 = 5 \lg r - 5, \quad (8.4)$$

где r — расстояние, и который отличается от видимого модуля на поглощение Δm , испытываемое светом звезды:

$$x = x_0 + \Delta m. \quad (8.5)$$

Помножая (8.3) на e^{-km} и интегрируя, мы получаем, как обычно при лапласовском преобразовании выражений типа (8.3),

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-km} N(m) dm = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(M) e^{-kM} dM \int_{-\infty}^{\infty} D(m-M) e^{-k(m-M)} dm.$$

Или

$$n(k) = d(k) \varphi(k), \quad (8.6)$$

где $n(k)$, $d(k)$ и $\varphi(k)$ суть лапласовские преобразованные от функций $N(m)$, $D(x)$ и $\varphi(M)$.

В частности

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-km} N(m) dm = \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-km} A(m) dm = \frac{a(k)}{k} \quad (8.7)$$

поскольку

$$A(m) = \frac{dN(m)}{dm}. \quad (8.8)$$

Внося (8.7) в (8.6), получаем:

$$a(k) = k\varphi(k) d(k). \quad (8.9)$$

Очевидно, что $k\varphi(k)$ есть величина, которая не подвержена флуктуациям, происходящим вследствие дискретной структуры поглощающего слоя. Поэтому мы можем из (8.9) заключить, что изучение флуктуаций в $a(k)$ сводится к изучению флуктуаций в $d(k)$. Поэтому в дальнейшем мы будем заниматься флуктуациями в значениях функции $d(k)$.

Рассматривая интеграл

$$d(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-kx} D(x) dx, \quad (8.10)$$

обратим внимание на то, что вместо видимого модуля расстояния x можно ввести истинный модуль x_0

$$x_0 = x - \Delta m$$

в качестве переменной интегрирования. Поскольку вследствие дискретной структуры поглощенного слоя $\Delta m = x - x_0$ меняется только в тех точках, где имеются поглощающие облака, а между ними остается постоянной, имеем:

$$dx = dx_0$$

и поэтому

$$d(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k(x_0 + \Delta m)} D(x_0) dx_0. \quad (8.11)$$

Если $D(x_0)$ есть полное число звезд в единичном телесном угле до расстояния, соответствующего исправленному модулю x_0 , то оно выражается при наших предположениях через постоянную пространственную плотность ρ_0 следующим образом:

$$D(x_0) = \frac{1}{3} \rho_0 r^3. \quad (8.12)$$

Согласно (8.4),

$$r = 10^{0.2x_0 + 1}; \quad dr = \frac{0.2}{\text{Mod}} r dx_0,$$

где r выражено в парсеках.

Поэтому (8.11) переписывается в виде:

$$d(k) = \frac{5 \text{ Mod}}{3} \rho_0 \int_0^{\infty} e^{-k(x_c + \Delta m)} r^2 dr.$$

Заменяя также

$$e^{-kx_c} = \left(\frac{r}{10}\right)^{-5k \text{ Mod}},$$

а также принимая во внимание, что Δm , т. е. полное поглощение луча во всех облаках, находящихся в данном направлении до расстояния r , выраженное в звездных величинах, можно представить через суммарную оптическую толщину τ тех же облаков

$$\Delta m = \frac{0.434}{0.400} \tau = 1.086 \tau,$$

мы получим:

$$d(k) = \frac{5}{3} \rho_0 \text{ Mod} \left(\frac{1}{10}\right)^{-5k \text{ Mod}} \int_0^{\infty} e^{-1.086 k \tau(r)} r^{2-5k \text{ Mod}} dr. \quad (8.13)$$

Мы видим, что $d(k)$ имеет вид:

$$d(k) = C \int_0^{\infty} e^{-p\tau} r^s dr, \quad (8.14)$$

где

$$C = \frac{5}{3} \rho_0 \text{ Mod} \cdot 10^{5k \text{ Mod}}; \quad p = 1.086 k; \quad s = 2 - 5k \text{ Mod}. \quad (8.15)$$

Среднее значение $d(k)$ мы вычисляем исходя из того, что среднее значение интеграла равно интегралу от среднего, т. е.

$$\overline{d(k)} = C \int_0^{\infty} \overline{e^{-p\tau}} r^s dr, \quad (8.16)$$

поскольку случайные значения принимает лишь множитель $e^{-p\tau}$.

Но, согласно (3.10), имеем:

$$\overline{e^{-p\tau}} = e^{-\nu_0(1-q^p)}, \quad (8.17)$$

где через ν_0 обозначено среднее число облаков, встречаемых лучом на расстоянии r . В обозначениях § 4

$$\nu_0 = \chi r$$

и поэтому

$$\overline{d(k)} = C \int_0^{\infty} e^{-xr(1-\overline{q^p})} r^s dr = \frac{C\Gamma(s+1)}{[x(1-\overline{q^p})]^{s+1}}. \quad (8.18)$$

Вычислим теперь математическое ожидание квадрата $d(k)$:

$$\overline{d(k)^2} = C^2 \overline{\left[\int_0^{\infty} e^{-p\tau} r^s dr \right]^2}. \quad (8.19)$$

Квадрат интеграла мы можем представить как двойной интеграл

$$\overline{d(k)^2} = C^2 \overline{\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-p(\tau+\tau')} r^s r'^s dr dr'}$$

и, распространяя усреднение только на тот множитель подинтегрального выражения, который является случайной функцией, получаем:

$$\overline{d(k)^2} = C^2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-p(\tau+\tau')} r^s r'^s dr dr' \quad (8.20)$$

или

$$\overline{d(k)^2} = 2C^2 \int_0^{\infty} dr \int_0^r e^{-p(\tau+\tau')} r^s r'^s dr'. \quad (8.21)$$

Поскольку теперь под знаком интеграла $r > r'$, постольку и $\tau > \tau'$. Поэтому, написав

$$e^{-p(\tau+\tau')} = e^{-2p\tau'} \cdot e^{-p(\tau-\tau')},$$

мы видим, что наше выражение распадается на произведение двух независимых случайных функций, одна из которых выражается через оптическую толщину отрезка пути $(0, r)$, а другая через оптическую толщину отрезка пути (r', r) . Поэтому, согласно (8.17),

$$e^{-p(\tau+\tau')} = e^{-\nu r' (1-\overline{q^{2p}})} e^{-\nu (r-r') (1-\overline{q^p})}. \quad (8.22)$$

Подставляя (8.22) в (8.21), приходим к интегралу:

$$\overline{d(k)^2} = 2C^2 \int_0^{\infty} e^{-\nu r (1-\overline{q^p})} r^s dr \int_0^r e^{-\nu r' (\overline{q^p} - \overline{q^{2p}})} r'^s dr'. \quad (8.23)$$

Этот интеграл можно выразить через некоторые простые функции. Он принадлежит к типу интегралов:

$$g(a, b; \alpha) = \int_0^{\infty} dy \int_0^y e^{-(ax+by)} x^{\alpha-1} y^{\alpha-1} dx. \quad (8.24)$$

Для вычисления $g(a, b; \alpha)$ введем $ax = t$. Тогда

$$a^{\alpha} g(a, b; \alpha) = \int_0^{\infty} e^{-by} y^{\alpha-1} dy \int_0^{ay} e^{-t} t^{\alpha-1} dt.$$

Дифференцируя по a , найдем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} [a^{\alpha} g(a, b; \alpha)] &= \int_0^{\infty} e^{-by} y^{\alpha} dy \frac{\partial}{\partial (ay)} \int_0^{ay} e^{-t} t^{\alpha-1} dt = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-by} y^{\alpha} \left[e^{-t} t^{\alpha-1} \right]_{t=ay} dy = \\ &= a^{\alpha-1} \int_0^{\infty} e^{-(a+b)y} y^{2\alpha-1} dy = a^{\alpha-1} (a+b)^{-2\alpha} \Gamma(2\alpha). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial a} [a^{\alpha} g(a, b; \alpha)] = a^{\alpha-1} (a+b)^{-2\alpha} \Gamma(2\alpha).$$

Отсюда находим:

$$a^{\alpha} g(a, b; \alpha) = \Gamma(2\alpha) \int_0^a u^{\alpha-1} (b+u)^{-2\alpha} du + C.$$

Но так как при $a=0$ мы имеем $a^{\alpha} g(a, b; \alpha) = 0$, то

$$g(a, b; \alpha) = \Gamma(2\alpha) a^{-\alpha} \int_0^a u^{\alpha-1} (b+u)^{-2\alpha} du.$$

Введем под знаком интеграла новую переменную:

$$u = bx.$$

Тогда

$$g(a, b; \alpha) = \Gamma(2\alpha) a^{-\alpha} b^{-\alpha} \int_0^{\frac{a}{b}} x^{\alpha-1} (1+x)^{-2\alpha} dx. \quad (8.25)$$

Поскольку находящийся в правой части интеграл не выражается через элементарные функции, мы можем обозначить:

$$\int_0^z x^{\alpha-1} (1+x)^{-2\alpha} dx = H(\alpha, z). \quad (8.26)$$

Тогда вместо (8.25) мы будем иметь:

$$g(a, b; \alpha) = \Gamma(2\alpha) a^{-\alpha} b^{-\alpha} H\left(\alpha, \frac{a}{b}\right). \quad (8.27)$$

Сравнивая с (8.24), мы можем, поэтому, написать:

$$\int_0^{\infty} \int_0^y e^{-(ax+by)} x^{\alpha-1} y^{\alpha-1} dx dy = \Gamma(2\alpha) a^{-\alpha} b^{-\alpha} H\left(\alpha, \frac{a}{b}\right).$$

Поэтому, на основании (8.23), получаем:

$$\begin{aligned} \overline{d(k)^2} &= 2C^2 \Gamma(2s+2) [\nu(1-\overline{q^p})]^{-2s-2} \times \\ &\times [\nu(\overline{q^p} - \overline{q^{2p}})]^{-2s-2} H\left(2s+2, \frac{\overline{q^p} - \overline{q^{2p}}}{1-\overline{q^p}}\right). \end{aligned} \quad (8.28)$$

Путем сравнения (8.28) и (8.18) находим:

$$\frac{\overline{d(k)^2} - \overline{d(k)}^2}{\overline{d(k)}^2} = \frac{2\Gamma(2s+2)}{[\Gamma(s+1)]^2} = \frac{H\left(2s+2, \frac{\overline{q^p} - \overline{q^{2p}}}{1-\overline{q^p}}\right)}{(\overline{q^p} - \overline{q^{2p}})^{2s+2}}.$$

По теореме умножения Гаусса имеем:

$$\Gamma(2s+2) = \pi^{-\frac{1}{2}} 2^{2s+1} \Gamma\left(s+\frac{3}{2}\right) \Gamma(s+1).$$

Поэтому окончательно получаем для среднего квадратичного отклонения

$$\frac{\overline{[d(k) - \overline{d(k)}]^2}}{\overline{d(k)}^2} = \frac{\pi^{-\frac{1}{2}} 2^{2s+2} \Gamma\left(s+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(s+1)} \frac{H\left(2s+2, \frac{\overline{q^p} - \overline{q^{2p}}}{1-\overline{q^p}}\right)}{(\overline{q^p} - \overline{q^{2p}})^{2s+2}}, \quad (8.29)$$

где p и s имеют значения, данные в (8.15).

Таким образом, нам удалось найти относительное значение среднего квадрата отклонения не только для поверхностной яркости, но и для любого значения лапласовской преобразованной от функции $N(m)$.

§ 9. Учет естественных флуктуаций в распределении звезд. Случай удаленной звездной системы

В предыдущих параграфах мы развили метод расчета флуктуаций поверхностной яркости Млечного Пути, вызываемых клочковатостью поглощающего слоя. Однако, как мы уже указывали, на флуктуациях поверхностной яркости сказываются и колебания пространственной плотности звезд. Вследствие сложности учета этого эффекта мы разберем сначала простой случай отдаленной звездной системы, когда при расчете видимых яркостей можно считать, что все члены этой системы находятся на практически одинаковых расстояниях от наблюдателя. При этом условии видимые яркости звезд зависят только от их абсолютной яркости и от поглощения, испытанного их светом. По-прежнему мы будем предполагать, что речь идет об однородной системе, имеющей вдоль луча зрения бесконечную оптическую глубину. Если для такой системы мы обозначим через $\Psi(I)$ вероятность того, что суммарная видимая яркость всех звезд, приходящихся на некоторую площадь S проекции, меньше, чем I , то можно утверждать, что эта функция будет инвариантной по отношению к воображаемому прибавлению к системе слоя толщиной ds , в котором звезды разных светимостей и облака различных прозрачностей встречаются с той же частотой, что в объеме первоначальной системы. Из добавочного слоя толщиной ds на область с сечением S будет проектироваться объем Sds . Если через n_a и n_b обозначим соответственно средние числа облаков и звезд, приходящихся на единицу объема, то при этом мы будем иметь: вероятность $1 - (n_a S_0 + n_b S) ds$ того, что в прибавленном объеме не встретится ни звезды и ни облака, вероятность $n_b S ds$ того, что в нем встретится одна звезда и вероятность $n_a S_0 ds$ того, что рассматриваемая область S будет экранироваться новым облаком, где S_0 есть среднее поперечное сечение поглощающего облака. При этом мы будем предполагать, что взятая нами площадка S по порядку величины меньше S_0

$$S \ll S_0.$$

Если после прибавления слоя ds суммарная яркость площадки S меньше I , то это может быть в одном из трех случаев: 1) если в объ-

еме Sds не было ни звезды и ни облака, а суммарная яркость до прибавления слоя была также меньше I ; 2) если в объеме Sds встретилось облако, и суммарная яркость до прибавления слоя была меньше $\frac{I}{q}$, где q прозрачность облака и 3) если в объеме Sds встретилась звезда и суммарная яркость площадки до прибавления слоя была меньше $I - i$, где i — яркость звезды.

Если теперь $\varphi(q)$ есть вероятность того, что поглощающее облако в данном направлении имеет прозрачность, меньшую, чем q , а $B(i)$ есть вероятность для звезды иметь яркость, меньшую, чем i , то принцип инвариантности в сочетании с теоремами сложения и умножения вероятностей приводит к следующему равенству

$$\Psi(I) = \Psi(I) (1 - n_a S_0 ds - n_b S ds) + n_a S_0 ds \int \Psi\left(\frac{I}{q}\right) d\varphi(q) + n_b S ds \int \Psi(I - i) dB(i)$$

или после сокращений:

$$\Psi(I) = \frac{n_a S_0}{n_a S_0 + n_b S} \int \Psi\left(\frac{I}{q}\right) d\varphi(q) + \frac{n_b S}{n_a S_0 + n_b S} \int \Psi(I - i) dB(i). \quad (9.1)$$

Обозначим:

$$\frac{n_a S_0}{n_a S_0 + n_b S} = 1 - \lambda; \quad \frac{n_b S}{n_a S_0 + n_b S} = \lambda. \quad (9.2)$$

Тогда уравнение (9.1) переписывается в виде:

$$\Psi(I) = (1 - \lambda) \int \Psi\left(\frac{I}{q}\right) d\varphi(q) + \lambda \int \Psi(I - i) dB(i). \quad (9.3)$$

Это и есть функциональное уравнение для функции распределения $\Psi(I)$. Интегрирование в его последнем члене распространяется только на область $0 < i < I$, поскольку случай, когда $i > I$, не благоприятствует выполнению условия о том, что наблюдаемая суммарная интенсивность меньше i , вследствие чего соответствующая этой возможности вероятность должна вовсе не входить в правую часть уравнения (9.1). Дифференцируя (9.3), мы получим для плотности распределения уравнение:

$$\Psi(I) = (1 - \lambda) \int \Psi\left(\frac{I}{q}\right) d\varphi(q) + \lambda \int \Psi(I - i) dB(i). \quad (9.4)$$

Из этого уравнения легко определяются последовательно математические ожидания разных степеней I . Так, помножая его на $I dI$, интегрируя по I от 0 до ∞ , мы получим:

$$\bar{I} = (1 - \lambda) \int_0^1 q d\varphi(q) \int_0^{\infty} \Psi\left(\frac{I}{q}\right) \frac{I}{q} d\frac{I}{q} + \lambda \int_0^{\infty} dB(i) \int_0^{\infty} \Psi(I-i) I dI$$

или, принимая во внимание, что независимо от обозначения переменной интегрирования

$$\int_0^{\infty} \Psi(x) x dx = \int_0^{\infty} \Psi\left(\frac{I}{q}\right) \frac{I}{q} d\frac{I}{q} = \bar{I},$$

а также вводя в последнем члене новую переменную интегрирования $I - i = y$, найдем:

$$\bar{I} = (1 - \lambda) \bar{q} \bar{I} + \lambda \bar{I} + \lambda \bar{i}, \quad (9.5)$$

поскольку

$$\int_0^{\infty} i dB(i) = \bar{i}.$$

Из (9.5) имеем:

$$\bar{I} = \frac{\lambda \bar{i}}{(1 - \lambda)(1 - \bar{q})}. \quad (9.6)$$

Помножая (9.4) на $I^2 dI$ и интегрируя по всему промежутку, мы точно так же найдем:

$$\bar{I}^2 = (1 - \lambda) \int_0^1 q^2 d\varphi(q) \int_0^{\infty} \Psi\left(\frac{I}{q}\right) \frac{I^2}{q^2} d\frac{I}{q} + \lambda \int_0^{\infty} dB(i) \int_i^{\infty} \Psi(I-i) I^2 dI.$$

С помощью тех же подстановок получаем:

$$\bar{I}^2 = (1 - \lambda) \bar{q}^2 \bar{I}^2 + \lambda \bar{I}^2 + 2\lambda \bar{i} \bar{I} + \lambda \bar{i}^2 \quad (9.7)$$

или

$$\bar{I}^2 (1 - \lambda)(1 - \bar{q}^2) = \frac{2\lambda^2 \bar{i}^2}{(1 - \lambda)(1 - \bar{q})} + \lambda \bar{i}^2.$$

Отсюда

$$\bar{I}^2 = \frac{2\lambda^2 \bar{i}^2}{(1 - \lambda)^2 (1 - \bar{q})(1 - \bar{q}^2)} + \frac{\lambda \bar{i}^2}{(1 - \lambda)(1 - \bar{q}^2)}$$

или

$$\bar{I}^2 = \frac{2\lambda^2 \bar{i}^2 + \lambda \bar{i}^2 (1-\lambda)(1-\bar{q})}{(1-\lambda)^2 (1-\bar{q})(1-\bar{q}^2)} + \frac{\lambda (\bar{i}^2 - \bar{i}^2)}{(1-\lambda)(1-\bar{q}^2)}.$$

Для относительного значения среднего квадратичного отклонения после некоторых преобразований получаем:

$$\frac{(I-\bar{I})^2}{\bar{I}^2} = \frac{1}{\lambda} \frac{(1-\bar{q})^2}{1-\bar{q}^2} + \frac{1-\lambda}{\lambda} \frac{\bar{q}^2 - \bar{q}^2}{1-\bar{q}^2} + \frac{1-\lambda}{\lambda} \frac{\bar{i}^2 - \bar{i}^2}{\bar{i}^2} \frac{(1-\bar{q})^2}{(1-\bar{q}^2)}. \quad (9.8)$$

Это трехчленное выражение сильно упрощается в том случае, когда дисперсия q и дисперсия i столь малы, что ими можно пренебречь.

В этом случае:

$$\bar{i} = i_0; \quad \bar{i}^2 = i_0^2; \quad \bar{q} = q_0; \quad \bar{q}^2 = q_0^2.$$

Тогда

$$\frac{(I-\bar{I})^2}{\bar{I}^2} = \frac{1}{\lambda} \frac{1-q_0}{1+q_0}, \quad (9.9)$$

что отличается от формулы (5.11) лишь множителем $\frac{1}{\lambda}$.

Если число звезд очень велико по сравнению с числом поглощающих облаков, величина λ , согласно (9.2), будет близка к единице и тогда формула (9.9) обратится в (5.11). Таким образом, между двумя выводами имеется полное соответствие. Точно так же, когда $\lambda \rightarrow 1$, общее выражение (9.8) стремится к (5.10). На практике, однако, хотя $1-\lambda$ мало, множитель $\frac{\bar{i}^2 - \bar{i}^2}{\bar{i}^2}$ велик по сравнению с единицей, вследствие огромной дисперсии абсолютных величин звезд. Поэтому последним членом в выражении (9.8) не всегда можно пренебрегать.

С другой стороны, в тех случаях, когда речь идет о парциальных суммарных яркостях звезд определенных спектральных типов, у которых дисперсия абсолютных яркостей мала, последний член в выражении (9.8) может оказаться достаточно малым.

§ 10. Случай, когда наблюдатель находится внутри системы

Когда наблюдатель находится внутри звездной системы, то применение принципа инвариантности к случаю одновременного учета клочковатости поглощающего слоя и естественных флуктуаций стал-

квивается с затруднениями. Основное затруднение заключается в том, что если наблюдатель отодвигается назад (в направлении, противоположном тому, которое он наблюдает), то расстояния всех звезд, увеличиваясь на одну и ту же величину, меняются в разных пропорциях, вследствие чего влияние перемещения на суммарную яркость не представляется возможным выразить столь простым образом, как это было в § 5. Поэтому в настоящем случае мы пойдем по несколько иному пути. Мы представим сначала, что хотя наблюдатель и находится в системе, но звезды и поглощающие облака, находящиеся от него на расстоянии меньшем, чем некоторое r_0 , убраны. Мы попытаемся составить уравнение для флуктуаций в такой „полой“ системе, причем в это уравнение r_0 будет входить как параметр. При $r_0 = 0$ мы имели бы тогда решение для интересующего нас случая.

Итак, оставляя в силе прежние предположения об однородности строения звездной системы и системы поглощающих облаков, мы предположим, однако, что эти условия соблюдаются в данном направлении, начиная лишь с расстояния r_0 от наблюдателя. В промежутке же от 0 до r_0 пусть не будет ни звезд, ни поглощающих облаков. Вероятность того, что при этих условиях суммарная видимая яркость всех звезд внутри некоторого телесного угла ω будет меньше I , обозначим через $\Psi_\omega(r_0, I)$. Если теперь мы прибавим к такой системе слой, простирающийся от $r_0 - dr$ до r_0 , в котором средние плотности числа звезд и облаков n_b и n_a те же, что и в остальной системе, то распределение вероятностей различных значений суммарной яркости в этом случае будет описываться функцией $\Psi_\omega(r_0 - dr, I)$. На основании теорем сложения и умножения вероятностей, мы тогда будем иметь:

$$\Psi_\omega(r_0 - dr, I) = (1 - n_b S dr - n_a S_0 dr) \Psi_\omega(r_0, I) + n_a S_0 dr \int \Psi_\omega\left(r_0, \frac{I}{q}\right) d\varphi(q) + n_b S dr \int \Psi_\omega(r_0, I - j) dB(i). \quad (10.1)$$

При этом, при данном ω (т. е. при заданной величине участка неба) площадь поперечного сечения S будет величина переменная, равная

$$S = r_0^2 \omega. \quad (10.2)$$

С другой стороны, в то время как функция $B(i)$ описывает распределение абсолютных яркостей, т. е. яркостей, которые наблюдались бы на некотором стандартном расстоянии, функция $\Psi_\omega(r, I - j)$ под знаком интеграла в последнем члене написанного равенства зависит не от $I - i$, а от $I - j$, где j означает видимую яркость на

расстоянии r без поглощения. Если мы условимся указанное стандартное расстояние принимать за единицу расстояний, то

$$j = \frac{i}{r_0^2}. \quad (10.3)$$

Переносим член $\Psi_\omega(r, I)$ в левую часть (10.1) и деля на dr , мы найдем:

$$-\frac{d\Psi_\omega(r_0, I)}{dr_0} = -(n_b \omega r_0^2 + n_a S_0) \Psi_\omega(r_0, I) + n_a S_0 \int \Psi_\omega\left(r_0, \frac{I}{q}\right) d\varphi(q) + n_b \omega r_0^2 \int \Psi_\omega\left(r_0, I - \frac{i}{r_0^2}\right) dB(i). \quad (10.4)$$

Решение этого уравнения и дает нам искомую функцию распределения. Не ставя пока перед собой цель найти это решение, мы ограничимся более скромной задачей—нахождением математических ожиданий первых двух степеней. Для этого сначала продифференцируем (10.4) по I , чтобы перейти от функции распределения к плотности вероятности, а затем, помножив на $I dI$, проинтегрируем. Будем иметь:

$$-\frac{d\bar{I}_\omega}{dr_0} = -(n_b \omega r_0^2 + n_a S_0) \bar{I}_\omega + n_a S_0 \bar{q} \bar{I}_\omega + n_b \omega (\bar{I}_\omega r_0^2 + \bar{i}) \quad (10.5)$$

или

$$\frac{d\bar{I}_\omega}{dr_0} = n_a S_0 (1 - \bar{q}) \bar{I}_\omega - n_b \omega \bar{i}. \quad (10.6)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\bar{I}_\omega = \int_{r_0}^{\infty} e^{-n_a S_0 (1 - \bar{q})(r - r_0)} n_b \omega \bar{i} dr + C_1 e^{n_a S_0 (1 - \bar{q}) r_0},$$

где C_1 — постоянная интегрирования. Выполняя интегрирование, приходим к результату:

$$\bar{I}_\omega = \frac{n_b \omega \bar{i}}{n_a S_0 (1 - \bar{q})} + C_1 e^{n_a S_0 (1 - \bar{q}) r_0}.$$

Легко видеть, что постоянная C_1 равна нулю. В самом деле; отличие ее от нуля означало бы наличие на бесконечности источника бесконечно высокой поверхностной яркости. По смыслу задачи его не должно быть. Поэтому

$$\bar{I}_\omega = \frac{n_b \omega \bar{i}}{n_a S_0 (1 - \bar{q})}. \quad (10.7)$$

Помножая (10,4) на $I^2 dI$ и интегрируя, мы получим уравнение для среднего квадрата интенсивности:

$$-\frac{d\bar{I}_\omega^2}{dr_0} = -(n_b \omega r_0^2 + n_a S_0) \bar{I}_\omega^2 + n_a S_0 \bar{q}^2 \bar{I}_\omega + n_b \omega \left(\bar{I}_\omega r_0^2 + 2i \bar{I}_\omega + \frac{1}{r_0^2} \bar{i}^2 \right)$$

или

$$\frac{d\bar{I}_\omega^2}{dr_0} = n_a S_0 (1 - \bar{q}^2) \bar{I}_\omega^2 - 2n_b \omega i \bar{I}_\omega - n_b \omega \frac{\bar{i}^2}{r_0^2}.$$

Решение этого уравнения, в свою очередь, имеет вид:

$$\bar{I}_\omega^2 = \int_{r_0}^{\infty} e^{-n_a S_0 (1 - \bar{q}^2) (r - r_0)} \left[2n_b \omega i \bar{I}_\omega + n_b \omega \frac{\bar{i}^2}{r_0^2} \right] dr + C_2 e^{n_a S_0 (1 - \bar{q}^2) r_0}.$$

Принимая во внимание, что, согласно (10.7), величина \bar{I}_ω не зависит от r и учитывая, что и в данном случае постоянная интегрирования $C_2 = 0$, находим:

$$\bar{I}_\omega^2 = \frac{2n_b^2 \omega^2 \bar{i}^2}{n_a^2 S_0^2 (1 - \bar{q}) (1 - \bar{q}^2)} + n_b \omega \bar{i}^2 e^{n_a S_0 (1 - \bar{q}^2) r_0} \int_{r_0}^{\infty} e^{-n_a S_0 (1 - \bar{q}^2) r} \frac{dr}{r^2}.$$

После подстановки новой переменной интегрирования $r = r_0 t$ окончательно получаем:

$$\begin{aligned} \bar{I}_\omega^2 = & \frac{2n_b^2 \omega^2 \bar{i}^2}{n_a^2 S_0^2 (1 - \bar{q}) (1 - \bar{q}^2)} + \\ & + \frac{n_b \omega \bar{i}^2}{r_0} e^{n_a S_0 (1 - \bar{q}^2) r_0} Ei_2 [n_a S_0 (1 - \bar{q}^2) r_0], \end{aligned} \quad (10.8)$$

где Ei (y) есть трансцендентная функция, определяемая через

$$Ei_2(y) = \int_1^{\infty} e^{-yt} \frac{dt}{t^2}. \quad (10.9)$$

Отсюда нетрудно найти также и выражение для среднеквадратичного отклонения:

$$\begin{aligned} \frac{(I_\omega - \bar{I}_\omega)^2}{\bar{I}_\omega^2} = & \frac{2(1 - \bar{q})}{1 - \bar{q}^2} - 1 + \\ & + \frac{\bar{i}^2}{i^2} \frac{n_a^2 S_0^2 (1 - \bar{q})^2}{n_b \omega r_0} e^{n_a S_0 (1 - \bar{q}^2) r_0} Ei_2 [n_a S_0 (1 - \bar{q}^2) r_0] \end{aligned}$$

или

$$\frac{(I_\omega - \bar{I}_\omega)^2}{\bar{I}_\omega^2} = \frac{(1 - \bar{q})^2}{1 - \bar{q}^2} + \frac{\bar{i}^2}{\bar{i}^2} \frac{n_a^2 S_0^2 (1 - \bar{q})^2}{n_b \omega r_0} e^{n_a S_0 (1 - \bar{q}^2) r_0} Ei_2 [n_a S_0 (1 - \bar{q}^2) r_0]. \quad (10.10)$$

Особенность этого выражения заключается в том, что оно стремится к бесконечности при $r_0 \rightarrow 0$. Это является следствием того, что таким же свойством обладает среднее значение квадрата интенсивности. Тот факт, что среднее значение квадрата интенсивности в том случае, когда мы не исключаем близких звезд, обращается в бесконечность, имеет следующую простую причину. Примем, что вблизи нас звездная плотность постоянна. Вероятность встретить звезду на расстоянии от r до $r + dr$ внутри телесного угла ω пропорциональна $\omega r^2 n_b dr$. Но видимая яркость каждой звезды равна $\frac{i}{r^2}$, а ее квадрат $\frac{i^2}{r^4}$. Следовательно, математическое ожидание квадрата видимой яркости в слое от r до $r + dr$ будет $\frac{\omega}{r^2} n_b \bar{i}^2 dr$. При интегрировании по r (т. е. при усреднении) от нуля до любого малого расстояния от наблюдателя получится бесконечность. При этом мы даже не учитывали возможность наличия в исследуемом объеме двух звезд, что только может увеличить квадрат суммарной интенсивности.

По указанной причине при применении формулы (10.10) следует исключать из рассмотрения звезды, находящиеся на расстоянии, меньшем, чем некоторое r_0 , и исключать влияние облаков, находящихся ближе этого расстояния. Сравнительно простые соображения показывают, что практически целесообразно брать $r_0 > 100$ парсек.

В заключение этого параграфа мы вновь должны подчеркнуть, что полученные нами формулы (10.7) и (10.10) применимы только к направлениям, находящимся в плоскости Галактики, так как они предполагают практически бесконечную глубину слоя звезд и облаков в направлении наблюдения.

§ 11. Корреляционная задача

До сих пор мы рассматривали вопрос о вероятностях тех или иных значений интересующих нас величин в какой-либо определенной точке (или определенном участке) неба. Однако в силу того,

что поглощающие облака имеют конечное поперечное сечение, между значениями чисел звезд до определенной величины в двух близких друг к другу участках неба (или значениями суммарных яркостей) должна существовать корреляция. Исследование корреляционных связей, даже при ряде упрощающих предположений, дело гораздо более трудное, чем решение тех задач, которые были рассмотрены выше. Однако желательно разобрать отдельные примеры для того, чтобы на них ознакомиться хотя бы с характером задачи и возникающими при их решении затруднениями.

Рассмотрим сначала задачу о корреляции чисел внегалактических туманностей до определенной величины, приходящихся на единицу телесного угла в двух направлениях, составляющих между собой малый телесный угол α . Допустим, что оба эти направления имеют практически одну и ту же галактическую широту. Обозначим через $u_r(\tau_1, \tau_2)$ вероятность того, что сумма оптических толщин облаков, встречаемых первым лучом на протяжении от наблюдателя до расстояния r , будет меньше τ_1 , а сумма оптических толщин облаков, встречаемых вторым лучом на таком же протяжении, меньше τ_2 . Значение той же функции u для расстояния $r + dr$ на основании теорем сложения и умножения вероятностей можно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned} u_{r+dr}(\tau_1, \tau_2) = & (1 - \chi dr - \theta \chi dr + \theta \chi dr) u_r(\tau_1, \tau_2) + \\ & + \chi(1 - \theta) dr \int u_r(\tau_1 - \sigma, \tau_2) dF_\alpha(\sigma) + \\ & + \chi(1 - \theta) dr \int u_r(\tau_1, \tau_2 - \sigma) dF_\alpha(\sigma) + \\ & + \theta \chi dr \iint u_r(\tau_1 - \sigma_1, \tau_2 - \sigma_2) d^2F(\sigma_1, \sigma_2). \end{aligned} \quad (11.1)$$

Здесь χdr по-прежнему означает вероятность того, что на протяжении dr луч встретит поглощающее облако, а θ есть вероятность того, что если на расстоянии r какое-либо облако пересекается одним из лучей, то оно пересекается и вторым лучом. Легко видеть, что θ будет зависеть от α и r . Очевидно, что $(1 - \theta)\chi dr$ есть вероятность того, что первый из лучей на протяжении dr встретит облако, не пересекаемое вторым, а $\theta\chi dr$ есть вероятность того, что оба луча пересекут одно и то же облако. Далее $F_\alpha(\sigma)$ есть функция распределения значений оптических толщин облака в месте пересечения его лучом, когда известно, что другой луч (образующий угол α с первым) не пересекает этого облака. Наконец, $F_\alpha(\sigma_1, \sigma_2)$ есть функция распределения оптических толщин σ_1 и σ_2 облака в пересечениях соответственно первым и вторым лучами, когда известно, что оба

луча действительно пересекают облака на расстоянии r . Очевидно, что $F_\alpha(\sigma_1, \sigma_2)$ будет так же, как и $F_\alpha(\sigma)$, зависеть от α и r .

Из (11.1) путем обычных преобразований получаем уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{du_r(\tau_1, \tau_2)}{\lambda dr} = & -(2 - \theta) u_r(r_1, r_2) + \\ & + (1 - \theta) \int_0^{\tau_1} u_r(\tau_1 - \sigma, \tau_2) dF_\alpha(\sigma) + (1 - \theta) \int_0^{\tau_2} u_r(\tau_1, \tau_2 - \sigma) dF_\alpha(\sigma) + \\ & + \theta \int_0^{\tau_1} \int_0^{\tau_2} u_r(\tau_1 - \sigma_1, \tau_2 - \sigma_2) d^2 F_\alpha(\sigma_1, \sigma_2). \end{aligned} \quad (11.2)$$

В этом случае, так же как и раньше, мы вместо того, чтобы заниматься поисками решения полученного уравнения, попытаемся получить математические ожидания тех величин, которые могут быть определены непосредственно из наблюдения. В случае внегалактических туманностей мы можем на основании подсчетов в двух соседних участках, разделенных угловым расстоянием α , получить среднее значение произведения

$$N_1^{l_1} N_2^{l_2},$$

где l_1 и l_2 любые целые числа. Но числа N_1 и N_2 пропорциональны $Q_1^{3/2}$ и $Q_2^{3/2}$, где Q_1 и Q_2 представляют собой коэффициенты прозрачности слоя облаков в рассматриваемых направлениях. Мы имеем:

$$Q_1 = e^{-\tau_{10}}; \quad Q_2 = e^{-\tau_{20}}, \quad (11.3)$$

где τ_{10} и τ_{20} значения оптических толщин τ_1 и τ_2 на расстоянии $r=r_0$, где достигается граница слоя облаков. Поэтому нас будут интересовать средние значения величин

$$Q_1^{\frac{3}{2} l_1} Q_2^{\frac{3}{2} l_2} = e^{-\frac{3}{2}(l_1 \tau_{10} + l_2 \tau_{20})}. \quad (11.4)$$

Вследствие этого нам нужно научиться находить из уравнения (11.2) средние значения выражений типа $e^{-(k_1 \tau_1 + k_2 \tau_2)}$, т. е.

$$Q_1^{\frac{3}{2} l_1} Q_2^{\frac{3}{2} l_2} = \iint e^{-(k_1 \tau_1 + k_2 \tau_2)} d^2 u_{r_0}(\tau_1, \tau_2) = g_{r_0}(k_1, k_2). \quad (11.5)$$

Для этого помножим (11.2) на $e^{-(k_1 \tau_1 + k_2 \tau_2)}$ и проинтегрируем по всем значениям τ_1 и τ_2 . Переставляя при этом в получающихся интегралах порядок интегрирования, мы найдем:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dr} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(k_1\tau_1 + k_2\tau_2)} u_r(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \\
& = (2 - \theta) \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(k_1\tau_1 + k_2\tau_2)} u_r(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\
& + (1 - \theta) \int e^{-k_1\sigma} dF_\alpha(\sigma) \iint e^{-(k_1\tau_1 + k_2\tau_2)} u_r(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\
& + (1 - \theta) \int e^{-k_2\sigma} dF_\alpha(\sigma) \iint e^{-(k_1\tau_1 + k_2\tau_2)} u_r(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\
& + \theta \iint e^{-(k_1\sigma_1 + k_2\sigma_2)} d^2F_\alpha(\sigma_1, \sigma_2) \times \\
& \times \iint e^{-(k_1\tau_1 + k_2\tau_2)} u_r(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \tag{11.6}
\end{aligned}$$

Посредством двукратного интегрирования по частям легко показать, что

$$\begin{aligned}
& \iint e^{-(k_1\tau_1 + k_2\tau_2)} u_r(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \\
& = \frac{1}{k_1 k_2} \iint e^{-(k_1\tau_1 + k_2\tau_2)} d^2 u_r(\tau_1, \tau_2) = \frac{g_r(k_1, k_2)}{k_1 k_2}. \tag{11.7}
\end{aligned}$$

Поэтому уравнение (11.6) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned}
& \frac{dg_r}{dr} = - (2 - \theta) g_r + (1 - \theta) g_r \int e^{-k_1\sigma} dF_\alpha(\sigma) + \\
& + (1 - \theta) g_r \int e^{-k_2\sigma} dF_\alpha(\sigma) + \theta g_r \iint e^{-(k_1\sigma_1 + k_2\sigma_2)} d^2 F_\alpha(\sigma_1, \sigma_2).
\end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned}
& \int e^{-k_1\sigma} dF_\alpha(\sigma) = \overline{q_\alpha^{k_1}}; \quad \int e^{-k_2\sigma} dF_\alpha(\sigma) = \overline{q_\alpha^{k_2}}; \\
& \iint e^{-(k_1\sigma_1 + k_2\sigma_2)} d^2 F_\alpha(\sigma_1, \sigma_2) = \overline{(q_1^{k_1} q_2^{k_2})_\alpha}, \tag{11.8}
\end{aligned}$$

где $\overline{q_\alpha^{k_1}}$ есть среднее значение k_1 -ой степени прозрачности облака при пересечении его первым лучом, в предположении, что оно не пересекается вторым, а $\overline{(q_1^{k_1} q_2^{k_2})_\alpha}$ есть среднее значение произведения соответствующих степеней прозрачностей при пересечении обоими луча-

ми облака на расстоянии r . Очевидно, что все эти величины будут зависеть как от α , так и от r . На основании сказанного:

$$\frac{dg_r}{\alpha dr} = -(2-\theta)g_r + (1-\theta)\overline{q_\alpha^{k_1}}g_r + (1-\theta)\overline{q_\alpha^{k_2}}g_r + \theta\overline{(q_1^{k_1}q_2^{k_2})_\alpha}g_r. \quad (11.9)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\begin{aligned} \log g_r(k_1, k_2) = & - \int_0^r (2-\theta) \alpha dr + \\ & + \int_0^r (1-\theta) (\overline{q_\alpha^{k_1}} + \overline{q_\alpha^{k_2}}) \alpha dr + \int_0^r \theta \overline{(q_1^{k_1}q_2^{k_2})_\alpha} \alpha dr. \end{aligned} \quad (11.10)$$

Мы видим, что решение задачи сводится к простым квадратурам. Однако для их выполнения следует знать зависимость всех входящих под знаки интегралов в правой части (11.10) величин от расстояния. А это возможно только при наличии данных о распределении размеров, форм и оптических свойств среди совокупности облаков.

Возьмем в качестве примера частный случай, когда все значения прозрачности облаков q одинаковы и равны q_0 . В этом случае $\overline{q_\alpha^{k_1}} = q_0^{k_1}$; $\overline{q_\alpha^{k_2}} = q_0^{k_2}$ и, наконец, $\overline{(q_1^{k_1}q_2^{k_2})_\alpha} = q_0^{k_1+k_2}$.

Тогда, если обозначить

$$\int_0^r \alpha dr = \nu; \quad \int_0^r \theta \alpha dr = t\nu, \quad (11.11)$$

то решение (11.10) примет простой вид:

$$g_r(k_1, k_2) = e^{-\nu [(2-t) - (1-t)(q_0^{k_1} + q_0^{k_2}) - tq_0^{k_1+k_2}]}. \quad (11.12)$$

При этом нас должно интересовать значение g при $r = r_0$. Поэтому, обозначая $\nu(r_0) = \nu_0$ и $t(r_0) = t_0$, мы окончательно найдем:

$$g_{r_0}(k_1, k_2) = e^{-\nu_0 [(1-t_0)(2 - q_0^{k_1} - q_0^{k_2}) + t_0(1 - q_0^{k_1+k_2})]}. \quad (11.13)$$

В частности, когда мы имеем дело с подсчетами внегалактических туманностей, мы можем практически получить среднее значение произведения $\overline{N_1 N_2}$. Согласно (11.4), это означает, что нам следует взять $k_1 = k_2 = \frac{3}{2}$ и в этом случае

$$\overline{N_1 N_2} = N_0^2 \overline{Q_1^{3/2} Q_2^{3/2}} = N_0^2 e^{-\nu_0 [2(1-t_0)(1 - q_0^{3/2}) + t_0(1 - q_0^3)]}. \quad (11.14)$$

Для коэффициента корреляции будем иметь:

$$R = \frac{\overline{(N_1 - \bar{N})(N_2 - \bar{N})}}{(\overline{N_1 - \bar{N}})^2} = \frac{\overline{N_1 N_2} - \bar{N}^2}{\overline{N^2} - \bar{N}^2} =$$

$$= \frac{e^{-\nu_0} [2(1-t_0)(1-q_0^{3/2}) + t_0(1-q_0^3)] - e^{-2\nu_0}(1-q_0^3)}{e^{-\nu_0}(1-q_0^3) - e^{-2\nu_0}(1-q_0^{3/2})}$$

или

$$R = \frac{e^{t_0 \nu_0 (1 - q_0^{3/2})^2} - 1}{e^{\nu_0 (1 - q_0^{3/2})^2} - 1}. \quad (11.15)$$

Поскольку, согласно (4.6), флуктуации, вычисляемые из сравнения ряда независимых между собой направлений, дают возможность вычислить $\nu_0(1 - q_0^{3/2})^2$, то определение коэффициента корреляции из наблюдений может дать возможность вычислить, согласно (11.5), значение t_0 , т. е. некоторый статистический параметр, характеризующий в первую очередь размеры облаков. При этом следует помнить, что в то время как характер изменения ν_0 с галактической широтой ясен (ν_0 меняется пропорционально $\operatorname{cosec} b$), зависимость t_0 от b будет вообще более сложной и в известной мере определяться законом распределения облаков по z .

Заметим, что для рассмотрения частного случая, когда все q равны между собой, можно было бы с самого начала ограничиться постановкой следующей задачи: какова вероятность, что два луча, образующих между собой угол z , пересекут до расстояния r соответственно n_1 и n_2 облаков. Тогда метод прибавления слоя толщиной dr приводит к уравнению для этой вероятности $P_\alpha(n_1, n_2)$

$$\frac{dP_\alpha(n_1, n_2)}{z dr} = - (2 - \theta) P_\alpha(n_1, n_2) + (1 - \theta) P_\alpha(n_1 - 1, n_2) +$$

$$+ (1 - \theta) P_\alpha(n_1, n_2 - 1) + \theta P_\alpha(n_1 - 1, n_2 - 1). \quad (11.16)$$

Само собой разумеется, что это уравнение может быть выведено при сделанном предположении (дисперсия q равна нулю), из (11.2). Преимуществом уравнения (11.16) является то, что его решение может быть прямо написано в виде конечной суммы:

$$P_\alpha(n_1, n_2) = e^{\nu(2-t)} \sum_{k=0}^{n_2} \frac{[\nu(1-t)]^{n_1-k}}{(n_1-k)!} \frac{[\nu(1-t)]^{n_2-k}}{(n_2-k)!} \frac{t^k \nu^k}{k!}. \quad (11.17)$$

При этом принимается, что если n_1 и n_2 различны, то n_2 есть меньшее из этих двух чисел, а t и ν по-прежнему определены через (11.11). Выражение (11.17), являясь решением рассматриваемой задачи, вместе с тем является лишь частным решением уравнения (11.16), но таким, которое удовлетворяет условию обращения в нуль всех P при $r=0$. Заметим, что распределение (11.17) является интересным двумерным обобщением закона Пуассона, дающим отличную от нуля корреляцию между n_1 и n_2 .

§ 12. Корреляционная задача яркостей в Млечном Пути

Очевидно, что мы можем найти коэффициент корреляции между яркостями двух точек Млечного Пути, разделенных заданным угловым расстоянием α , если сможем вычислить среднее значение произведения

$$I_1 I_2.$$

Это вычисление можно произвести в том случае, когда излучающая среда принимается непрерывной, а поглощающие облака дискретными, то есть, если осуществляются предположения § 5. Мы примем, кроме того, что все облака имеют одну и ту же прозрачность q_0 . Тогда дело сводится к вычислению среднего от произведения двух интегралов:

$$\overline{I_1 I_2} = \int_0^{\infty} q_0^{n_1(r_1)} \eta dr_1 \int_0^{\infty} q_0^{n_2(r_2)} \eta dr_2, \quad (12.1)$$

где $n_1(r_1)$ и $n_2(r_2)$ представляют собой соответственно числа облаков в первом направлении до расстояния r_1 и во втором направлении до r_2 .

Очевидно, что (12.1) можно переписать в виде:

$$\overline{I_1 I_2} = \eta^2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} q_0^{\overline{n_1(r_1) + n_2(r_2)}} dr_1 dr_2. \quad (12.2)$$

Но ясно, что среднее значение $q_0^{\overline{n_1(r_1) + n_2(r_2)}}$ симметрично по отношению к перестановке r_1 и r_2 . Поэтому

$$\overline{I_1 I_2} = 2\eta^2 \int_0^{\infty} dr_1 \int_0^{\infty} q_0^{\overline{n_1(r_1) + n_2(r_2)}} dr_2. \quad (12.3)$$

Но тогда, поскольку под знаком интеграла $r_2 > r_1$ сумму

$n_1(r_1) + n_2(r_2)$ можно разделить на два совершенно независимых друг от друга слагаемых:

$$n_1(r_1) + n_2(r_2) = [n_1(r_1) + n_2(r_1)] + [n_2(r_2) - n_2(r_1)]$$

и мы должны иметь:

$$\overline{q_0^{n_1(r_1) + n_2(r_2)}} = \overline{q_0^{n_1(r_1) + n_2(r_1)}} \overline{q_0^{n_2(r_2) - n_2(r_1)}}. \quad (12.4)$$

Второй множитель в правой части выражения (12.4) представляет собой среднее значение величины, характеризующей расположение облаков только во втором направлении и притом в промежутке от r_1 до r_2 , что не зависит от распределения облаков в отрезке $(0, r_1)$. Поэтому, так же как в § 3, согласно (8.10), будем иметь:

$$\overline{q_0^{n_2(r_2) - n_2(r_1)}} = e^{-(\nu_2 - \nu_1)(1 - q_0)}. \quad (12.5)$$

В нашем случае, когда плоскость Млечного Пути однородно заполнена облаками

$$\nu_2 - \nu_1 = \kappa(r_2 - r_1).$$

Что касается первого множителя правой части (12.4), то мы можем применить формулу (11.12). Действительно,

$$\overline{q_0^{n_1(r_1) + n_2(r_1)}} = \overline{e^{-[t_1(r_1) + t_2(r_2)]}} = g(1.1) = e^{-\nu_1 [(2 - t_1) - 2q_0(1 - t_1) - t_1 q_0^2]} \quad (12.6)$$

На основании (12.4), (12.5) и (12.6) мы можем переписать (12.3) в виде:

$$\overline{I_1 I_2} = 2r_1^2 \int_0^\infty e^{-2\kappa r_1(1 - q_0) + \kappa r_1 t(r_1)(1 - q_0)^2} dr_1 \int_{r_1}^\infty e^{-\kappa(r_2 - r_1)(1 - q_0)} dr_2.$$

Внутренний интеграл вычисляется и тогда получаем:

$$\overline{I_1 I_2} = \frac{2r_1^2}{k(1 - q_0)} \int_0^\infty e^{-\kappa r_1 [2 - t_1(r_1)(1 - q_0)](1 - q_0)} dr_1. \quad (12.7)$$

В каждом отдельном случае этот интеграл принимает то или иное значение в зависимости от характера функции $t(r_1)$, что, как мы указывали уже, зависит, в свою очередь, от угла α и от формы облаков.

§ 13. Системы без поглощения

Наряду со звездными системами, в которых поглощение света межзвездным веществом играет существенную роль, встречаются другие звездные системы, в которых это поглощение незаметно, а если и присутствует, то во всяком случае не носит столь иррегулярного характера как в нашей и ей подобных галактиках. Мы имеем в виду эллиптические туманности ранних подтипов, правильный вид которых на фотографиях не оставляет в этом никаких сомнений. Тем же свойством обладают и шарообразные скопления. Отсутствие в системах названных типов межзвездного поглощающего вещества вполне понятно, так как последнее образует в галактиках всегда плоские подсистемы, между тем как эллиптические галактики ранних подтипов и шарообразные скопления состоят почти исключительно из населения сферических подсистем.

Другим упрощающим дело обстоятельством является тот факт, что системы указанных категорий не содержат в себе местных групп звезд, открытых скоплений и звездных ассоциаций, т. е. сгущений физической природы. Поэтому в данном случае флуктуации в наблюдаемых числах звезд в основном должны носить характер естественных флуктуаций.

Эти естественные флуктуации в числах звезд должны, в свою очередь, вызывать флуктуации поверхностных яркостей на фотоснимках эллиптических туманностей и шарообразных скоплений, получаемых наблюдателями. Надо учитывать, что даже в крупнейшие телескопы трудно разрешить полностью на звезды даже ближайšie эллиптические туманности. Как известно, даже у $M\ 32$ и $NGC\ 205$ — спутников большой туманности Андромеды, с помощью крупнейших телескопов разрешается лишь совокупность гигантов, входящих в эти системы. Поэтому в большинстве случаев мы можем наблюдать лишь флуктуации в распределении поверхностной яркости.

Как мы увидим, теоретический расчет показывает, что характер этих флуктуаций яркости должен зависеть от формы функции светимости в данной системе и в частности от дисперсии светимостей. Это, по-видимому, открывает возможность (еще практически не проверенную) судить о некоторых свойствах реальной функции светимости на основании изучения характера флуктуаций.

Пусть функция светимости (фотографическая) выражается заданием $B(i)$, дающей вероятность того, что взятая наудачу звезда имеет светимость, меньшую, чем i . При этом под i можно подразумевать как абсолютную яркость, так и видимую, так как в данном случае речь

идет об отдаленной и притом прозрачной системе, так что обе величины отличаются друг от друга лишь постоянным множителем. Будем искать вероятность $u(S, I)$ того, что суммарная яркость звезд, находящихся на площадке размерами S , меньше I . Пусть далее n есть коэффициент, имеющий тот смысл, что $n \Delta S$ есть вероятность нахождения одной звезды на малой площадке ΔS . Составим уравнение для $u(S, I)$, используя метод приращения S . Очевидно, что в площадке $S + \Delta S$ суммарная яркость может оказаться меньше I при двух возможностях: 1) в ΔS нет ни одной звезды, но суммарная яркость в S меньше I и 2) в ΔS имеется звезда той или иной яркости i , а суммарная яркость звезд, находящихся в S , меньше $I - i$. Учитывая все это, на основании теорем сложения и умножения вероятностей, мы можем написать:

$$u(S + \Delta S, I) = (1 - n\Delta S) u(S, I) + n\Delta S \int u(S, I - i) dB(i),$$

откуда, перенося $u(S, I)$ направо и деля на ΔS , получаем уравнение

$$\frac{du(S, I)}{ndS} = -u(S, I) + \int_0^I u(S, I - i) dB(i). \quad (13.1)$$

Помножив это уравнение на I и интегрируя по I по всему промежутку $(0, \infty)$, мы находим для \bar{I} уравнение:

$$\frac{d\bar{I}}{ndS} = \bar{i},$$

откуда:

$$\bar{I} = nS\bar{i},$$

поскольку постоянная интегрирования по условиям задачи равна нулю.

Величина nS представляет собой среднее число звезд, приходящихся на площадку S . Обозначим его через \bar{N} .

Тогда:

$$\bar{I} = \bar{N}\bar{i}. \quad (13.2)$$

Точно так же, помножив (12.1) на I^2 и интегрируя, найдем для среднего квадрата суммарной интенсивности уравнение:

$$\frac{d\bar{I}^2}{dN} = 2\bar{N}\bar{i}^2 + \bar{i}^2. \quad (13.3)$$

Поскольку для $S=0$ мы должны иметь $\bar{I}^2=0$, из (13.3) непосредственно находим, интегрируя:

$$\bar{I}^2 = \bar{N}^2 \bar{i}^2 + \bar{N} \bar{i}^2. \quad (13.4)$$

Из (13.4) и (13.2) для относительного значения среднего квадратичного отклонения величины \bar{I} находим:

$$\frac{\overline{(I - \bar{I})^2}}{\bar{I}^2} = \frac{1}{\bar{N}} \frac{\bar{i}^2}{\bar{i}^2}. \quad (13.5)$$

Если бы не было дисперсии светимостей i , то мы имели бы $\bar{i}^2 = \bar{i}^2$ и тогда мы нашли бы широко известный в элементарной теории естественных флуктуаций результат, гласящий, что

$$\frac{\overline{(I - \bar{I})^2}}{\bar{I}^2} = \frac{1}{N}.$$

На самом же деле благодаря гигантской дисперсии светимостей, обычно наблюдаемой в звездных системах, отношение $\frac{\bar{i}^2}{\bar{i}^2}$ даже по порядку величины значительно превосходит единицу.

Изучаемые системы как раз с этой точки зрения чрезвычайно интересны. В противоположность окраинам нашей Галактики, в них нет сверхгигантов. В силу этого дисперсия светимостей в них должна быть меньше. Но с другой стороны, они наряду со звездами ветви гигантов (по своему виду отличающейся от ветви гигантов для плоских подсистем), согласно П. П. Паренаго, содержат большое число субкарликов (Паренаго, Сообщения ГАИШ, № 30, стр. 3—23, 1949). Поэтому вполне вероятно, что, будучи меньшей, чем дисперсия в периферийных частях Галактики, дисперсия светимостей в эллиптических туманностях все же не намного отличается от нее.

Вычислим, например, отношение $\frac{\bar{i}^2}{\bar{i}^2}$ для того случая, когда имеет место нормальное распределение абсолютных величин звезд вокруг некоторого среднего значения M_0 с дисперсией σ . В этом случае

$$dB(i) = Ce^{-\frac{(M - M_0)^2}{2\sigma^2}} dM,$$

где C постоянная нормирования. Имеем также:

$$i = i_0 \cdot 10^{-0,4M},$$

где i_0 есть условное обозначение светимости звезды нулевой абсолютной величины. Легко сосчитать, имея в виду значение постоянной C , что тогда

$$\frac{\overline{i^2}}{\bar{i}^2} = \frac{\int i^2 dB(i)}{\left[\int i dB(i) \right]^2} = e^{k^2 \sigma^2}, \quad (13.6)$$

где $k = \frac{0.400}{Mod} = 0.92$. Поскольку в окрестностях Солнца дисперсия абсолютных величин превосходит три звездные величины, то искомое отношение будет равно нескольким тысячам. Хотя для населения сферических подсистем дисперсия абсолютных величин может быть меньшей, все же отношение и в этом случае, вероятно, измеряется тысячами. Поэтому флуктуации поверхностной яркости в системах рассматриваемого типа должны быть в тысячи раз больше, чем они были бы, если бы эти системы состояли из звезд равной светимости, но в таком же числе, что и реальные числа их членов. Благодаря этому и только благодаря этому эти флуктуации могут стать доступными измерениям.

Определение из наблюдений численного значения выражения в левой части (13.5), т. е. относительного значения среднего квадрата отклонения, дало бы возможность найти значение $\frac{\overline{i^2}}{\bar{i}^2}$, которое, как

мы видели, зависит от дисперсии светимостей, если бы незнание \bar{N} , т. е. среднего числа всех звезд, приходящихся на измеряемую площадку, не мешало этому. Поэтому такое прямое получение данных о функции светимости на основании наблюдений над флуктуациями поверхностных яркостей в изображениях эллиптических туманностей не представляется пока практически возможным. Однако мы можем из наблюдений определить левую часть равенства

$$\frac{\overline{(I - \bar{I})^2}}{\bar{I}} = \frac{\overline{i^2}}{\bar{i}}, \quad (13.7)$$

которое получается путем умножения (13.5) на (13.2). Определив это отношение на разных расстояниях от центра туманности, мы получим тем самым некоторое представление об изменении функции светимости. Для этого следует только принять во внимание, что \bar{i} даже при значительном уменьшении процента гигантов будет мало меняться, так как гигантов вообще мало. Поэтому изменения величин (13.7) будут в основном обусловлены изменениями в величине $\overline{i^2}$. По-

следняя, наоборот, гораздо более чувствительна к изменению в процентном числе гигантов.

Заметим, что все сказанное применимо, конечно, в известной степени и к спиральным системам, плоскости которых наклонены к лучу зрения под углом, близким к 90° , так как в таких случаях поглощение на большей части протяжения туманности невелико. Однако надо сделать оговорку, что в этом случае необходимо учитывать влияние скоплений и ассоциаций звезд.

Бюракан, 1950, декабрь

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. Амбарцумян, Бюлл. Абастуманской обсерватории, **4**, 17, 1940. В этой работе впервые был поставлен вопрос о связи флуктуаций чисел внегалактических туманностей с клочковатостью поглощающего слоя в Галактике.

2. В. Амбарцумян, К теории флуктуаций яркости в Млечном Пути. ДАН СССР, **44**, 1944. Здесь было показано, что проблема флуктуаций яркости в Млечном Пути сводится к функциональному уравнению типа (5, 5).

3. В. Амбарцумян, К вопросу о флуктуациях яркости Млечного Пути. ДАН АрмССР, **1**, 9, 1944. В этой работе была поставлена задача о корреляции яркостей двух близких друг к другу точек Млечного Пути.

4. В. Амбарцумян, О флуктуациях яркости Млечного Пути. Бюлл. Абастуманской обсерватории, **8**, 43, 1945. Примененный здесь метод изучения флуктуаций поверхностных яркостей обобщен в § 8 настоящей работы.

5. Б. Маркьян, Флуктуации в видимом распределении звезд и космическое поглощение. Сообщения Бюраканской обсерватории, вып. **1**, 1946. В этой работе впервые рассмотрен вопрос о флуктуациях яркости в высоких галактических широтах, когда слой облаков имеет конечное протяжение и среднее число облаков конечно.

6. В. Амбарцумян, Подсчеты внегалактических туманностей и галактическое поглощение. ДАН АрмССР, **6**, 105, 1947. Здесь дан анализ подсчетов внегалактических туманностей, произведенных Шэпли.

7. Г. Русаков, Флуктуации яркости Млечного Пути и физические характеристики диффузных туманностей. Ученые записки ЛГУ, серия математических наук, **18**, 53, 1949. Здесь произведено сравнение теории флуктуаций в яркостях Млечного Пути с имеющимися наблюдениями. Поставлен вопрос о роли рассеянного отдельными облаками космической материи света. Приведены таблицы численных значений решений функционального уравнения (7.1) при различных q .

РАЗНОЕ

ОБ ОДНОМ ВОПРОСЕ ТЕОРИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ*

Для одного специального случая (колеблющаяся струна, естественные граничные условия) показывается, что спектр собственных значений однозначно определяет дифференциальное уравнение (в теории Шредингера «уравнение амплитуд»).

Для некоторых областей теоретической физики (волновая механика, теория колебаний), которые приводят к проблеме собственных значений, является важным вопрос об однозначном определении механической системы (т. е. гамильтоновой функции) посредством спектра собственных значений соответствующего линейного дифференциального уравнения. Если спектр действительно полностью определяет дифференциальное уравнение, то возможно, например, практически определить строение какой-либо атомной системы из спектра, т. е. решить задачу, так сказать, обратную проблеме Шредингера**. Но общий подход к проблеме ведет к ряду трудностей.

Мы здесь рассмотрим только специальный случай. Мы докажем, что из всех уравнений

$$\mu \frac{d^2\varphi}{dx^2} - q(x)\varphi + \alpha\varphi = 0,$$

где α — параметр собственных значений, $q(x)$ — непрерывная функция и μ — постоянная, при «естественных граничных условиях»:

$\varphi'(0) = \varphi'(\pi) = 0$ только уравнение колеблющейся струны со свободными концами

$$\kappa \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \alpha\varphi = 0$$

имеет собственные значения

$$\alpha_n = \kappa n^2.$$

* Über eine Frage der Eigenwerttheorie. Zs. f. Physik, **53**, 690, 1929.

** Этим замечанием я обязан Д. Д. Иваненко.

§ 1. Прежде всего мы рассмотрим дифференциальное уравнение

$$(py')' - gy - \lambda ry + \alpha y = 0, \quad (1)$$

где λry возмущающий член, r, p, p' — непрерывные функции от x и $p > 0$.

Дифференциальное уравнение (1) имеет для заданных граничных условий $y'(0) = \varphi'(\pi) = 0$ счетное множество собственных значений, которые мы можем расположить в порядке возрастающих значений:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \quad (2)$$

Эти собственные значения являются функциями от λ . Мы покажем, что эти функции не имеют действительной особой точки. Легко видеть, что для этого достаточно доказать, что $\alpha_i(\lambda)$ являются регулярными аналитическими функциями λ в окрестности $\lambda = 0$, поскольку таким образом мы доказываем наше утверждение для уравнения

$$(py')' + (q - \lambda_0 r) y - (\lambda - \lambda_0) ry + \alpha y = 0 \quad (3)$$

в окрестности точки $\lambda = \lambda_0$, где λ_0 есть любое действительное число. Но уравнение (3) идентично с уравнением (1). Прежде всего предположим, что $\alpha = 0$ не является собственным значением уравнения

$$(py')' - gy - \alpha y = 0. \quad (1')$$

Тогда дифференциальное выражение

$$L[y] = (py')' - gy$$

имеет функцию Грина $G(x, \xi)$.

Степенной ряд

$$S(x, \xi, \lambda) = G_1(x, \xi) + \lambda G_2(x, \xi) + \lambda^2 G_3(x, \xi) + \dots, \quad (4)$$

в котором

$$G_n(x, \xi) = \int \dots \int G(x, t_1) r(t_1) G(t_1, t_2) r(t_2) \dots \\ \dots r(t_{n-1}) G(t_{n-1}, \xi) dt_1, dt_2 \dots dt_{n-1}$$

сходится в круге $|\lambda| < \rho$, так как функции $G(x, \xi)$ и $r(x)$ ограничены. Сумма этого ряда, которая равна

$$S(x, \xi; \lambda) = \frac{k(x, \xi; \lambda)}{r(\xi)},$$

где $k(x, \xi; \lambda)$ представляет разрешающее ядро (резольвенту) ядра $G(x, \xi) r(x)$, является для $|\lambda| < \rho$ функцией Грина дифференциальной формы

$$L[y] - \lambda ry = (py')' - gy - \lambda ry.$$

собственные значения уравнений (7) и (1) отличаются друг от друга только постоянной величиной $\frac{k}{2}$. Поэтому последние также являются аналитическими функциями от λ .

Мы можем теперь утверждать, что для каждого действительного λ собственные значения уравнения (1) являются аналитическими функциями λ^* .

§ 2. Тот же самый способ, что и в прошлом параграфе, показывает нам, что $D(x, \xi; \alpha, \lambda)$ (числитель Фредгольма) также является аналитической функцией обеих переменных α и λ во всей α -плоскости и в круге $|\lambda| < \rho$.

Если мы обозначим нормированные собственные функции дифференциального уравнения (1') через

$$\varphi_1(x, \lambda), \varphi_2(x, \lambda), \dots, \quad (8)$$

то известно, что произведения $\varphi_i(x, \lambda) \varphi_i(\xi, \lambda)$ образуют в точках $\alpha = \alpha_i(\lambda)$ вычеты резольвенты

$$\Gamma(x, \xi; \alpha, \lambda) = \frac{D(x, \xi; \alpha, \lambda)}{D(\alpha, \lambda)}.$$

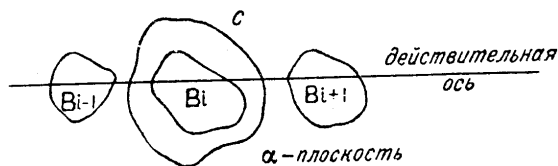
Мы имеем:

$$\varphi_i(x, \lambda) \varphi_i(\xi, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \Gamma(x, \xi; \alpha, \lambda) d\alpha, \quad (9)$$

где кривая C включает на α -плоскости точку $\alpha_i(\lambda)$, но не содержит никакой другой $\alpha_j(\lambda)$ ($j \neq i$). При изменении λ в области $|\lambda| < a < \rho$, где a является положительным числом, которое мы позднее выберем, каждое собственное значение изменяется в области B_i . Легко видеть, что для достаточно малого a ни одна из областей B_j ($j \neq i$) не имеет общих точек с B_i . Это следует из того, что, с одной стороны, благодаря экстремальным свойствам собственных значений при ограниченных изменениях λ все изменения собственных значений равномерно ограничены. С другой стороны, если $\alpha_1(\lambda), \dots, \alpha_N(\lambda)$ есть первые N собственных значений, являющиеся аналитическими функциями от λ , тогда мы можем выбрать N столь большим, чтобы $\alpha_{N+1}(\lambda), \dots$ для каждого $|\lambda| < \rho$ было больше, чем $\alpha_i(\lambda)$ для того же λ .

* Это утверждение можно доказать иным путем несколько короче, но наше доказательство включает, по-видимому, возможность распространения на случай нескольких независимых переменных. В этом случае, однако, обнаруживаются трудности, связанные с многократными собственными значениями.

Так как ни одна пара $\alpha_i(0)$ друг с другом не совпадает, мы можем принять a столь малым, чтобы для $|\lambda| < a$ все $\alpha_i(\lambda)$ ($i = 1, \dots, N$) были регулярны и чтобы ни одна пара областей B_i не имела общих точек. Теперь мы выбираем C так, что она включает область B_i , но не включает ни одну точку области B_j ($j \neq i$) (см. фиг. 1). Фор-



Фиг. 1.

мула (9) показывает тогда, что для достаточно малых λ функция $\varphi_i(x, \lambda)$ аналитически зависит от λ . Отсюда мы можем заключить, что $\varphi_i(x, \lambda)$ также является аналитической функцией λ .

Для дальнейших рассуждений важно ввести выражения для возмущенных собственных значений. Мы здесь запишем только первые члены разложения:

$$\alpha_i(\lambda) = \alpha_i(\lambda_0) + (\lambda - \lambda_0) \varepsilon_{ii}(\lambda_0) + (\lambda - \lambda_0)^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{ij}(\lambda_0)}{\alpha_i(\lambda_0) - \alpha_j(\lambda_0)} + \dots, \quad (10)$$

где штрих при знаке суммирования означает, что суммирование должно распространяться на все j , кроме $j=i$, и кроме того вводится обозначение

$$\varepsilon_{ij}(\lambda_0) = \int_0^{\pi} r(x) \varphi_i(x, \lambda_0) \varphi_j(x, \lambda_0) dx. \quad (11)$$

§ 3. Предположим теперь, что уравнение

$$\mu \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - r(x) \varphi + \alpha \varphi = 0 \quad (12)$$

имеет ту же систему собственных значений, что и уравнение

$$\kappa \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \alpha \varphi = 0$$

для граничных условий: $\varphi'(0) = \varphi'(\pi) = 0$.

Из этого непосредственно следует, что $\mu = \kappa$. Действительно, асимптотическими выражениями для собственных значений уравнений (11) и (12) являются

$$\alpha_n = n^2 \mu + 0 \quad (1)$$

$$\alpha_n = n^2\lambda + 0(1),$$

откуда следует: $\mu = \lambda$.

Напишем теперь уравнения

$$\lambda \frac{d^2 \varphi_i(x, 0)}{dx^2} + \alpha \varphi_i(x, 0) = 0,$$

$$\lambda \frac{d^2 \varphi_i(x, 1)}{dx^2} - r(x) \varphi_i(x, 1) + \alpha_i \varphi_i(x, 1) = 0;$$

умножим первое уравнение на $\varphi_i(x, 1)$ и второе на $\varphi_i(x, 0)$, затем вычтем второе из первого и проинтегрируем; тогда, благодаря формуле Грина, получим:

$$\int r(x) \varphi_i(x, 0) \varphi_i(x, 1) dx = 0. \quad (13)$$

Теперь мы имеем следующие асимптотические выражения для собственных функций

$$\varphi_i(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos ix + o\left(\frac{1}{i}\right),$$

$$\varphi_i(x, 1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos ix + o\left(\frac{1}{i}\right).$$

Следовательно, мы имеем для $\varphi_i(x, 0) \varphi_i(x, 1)$ асимптотическое выражение

$$\varphi_i(x, 0) \varphi_i(x, 1) = \frac{2}{\pi} \cos^2 ix + o\left(\frac{1}{i}\right) = \frac{1}{\pi} [1 + \cos 2ix] + o\left(\frac{1}{i}\right).$$

Из

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} r(x) \cos 2ix dx = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} r(x) o\left(\frac{1}{i}\right) dx = 0$$

и (13) мы заключаем

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int r(x) \varphi_i(x, 0) \varphi_i(x, 1) dx = \frac{1}{\pi} \int r(x) dx = 0.$$

Но так как $\varphi_1(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, то мы можем, согласно (10), разложение $\alpha_1(\lambda)$ для $\lambda_0 = 0$ привести к виду

$$\alpha_1(\lambda) = -\lambda^2 \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\varepsilon_{1j}^2}{\alpha_j(0)} + \dots, \quad (14)$$

т. е. для достаточно малых λ значение $\alpha_1(\lambda)$ отрицательно. Таким же образом $\alpha_1'(\lambda)$, как легко доказать посредством дифференцирования (14), для достаточно малого положительного λ отрицательно. Мы, однако, уже приняли, что $\alpha_1(0) = \alpha_1(1) = 0$, откуда видно, что $\alpha'(\lambda)$ в какой-то точке между нулем и единицей также положительно и, следовательно, где-то меняет свой знак. Пусть $\lambda = \delta$ является точкой, в которой $\alpha'(\delta) = 0$. Так как мы имеем $\alpha_1'(0) = 0$, то мы должны ожидать, что в некоторой точке δ_1 вторая производная $\alpha''(\lambda)$ становится равной нулю:

$$\alpha''(\delta_1) = 0$$

или, согласно (10),

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{\varepsilon_{ij}^2(\delta_1)}{\alpha_1(\delta_1) - \alpha_j(\delta_1)} = 0.$$

Так как все слагаемые отрицательны, то мы получаем:

$$\varepsilon_{1j}^2(\delta_1) = 0, \quad \varepsilon_{ij}(\delta_1) = 0 \quad (j \neq 1). \quad (15)$$

Однако, согласно (11), ε_{ij} являются коэффициентами разложения функции $q(x) \varphi(x_1, \delta_1)$ по системе ортогональных функций $\varphi_j(x, \delta_1)$ ($j = 1, 2, \dots$). Из полноты системы и из (15) следует, что

$$r(x) \varphi_1(x, \delta_1) = C \varphi_1(x, \delta_1)$$

или $r(x) = C$.

С другой стороны, $\int_0^{\pi} r dx = 0$, откуда $C = 0$.

Следовательно $r(x) = 0$.

Я выражаю свою глубокую благодарность профессору В. И. Смирнову за его ценные замечания к настоящей работе.

Пулково, Обсерватория,
21 декабря, 1928.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Courant und D. Hilbert, Methoden der Mathematischen Physik, 126 1924.

Примечание. Составленная В. А. Амбарцумяном в этой статье задача об отыскании дифференциального уравнения по собственным значениям рассматривалась в последнее время в ряде математических работ.

27 Труды

ОБ ОДНОМ СЛЕДСТВИИ ТЕОРИИ ДИРАКА ПРОТОНОВ И ЭЛЕКТРОНОВ*

(Представлено А. Крыловым, членом АН, 30 января 1930).

Общеизвестная тесная аналогия между электронами и световыми квантами была до сих пор уязвима в одном существенном пункте. Именно число доступных наблюдению световых квантов переменного и поэтому оказалось разумным изобрести резервуар световых квантов в нулевом состоянии и допустить возможность переходов из этого состояния в реально существующие и наоборот. Однако число электронов до настоящего времени принималось постоянным при вторичном квантовании. Представляется целесообразным отказаться от этого постоянства, т. е. ввести возможность уничтожения электронов (для чего астрофизика дает некоторые основания), и в общем создать резервуар недоступных наблюдению электронов совершенно аналогично резервуару Дирака для световых квантов [1]. Так как световые кванты удовлетворяют статистике Бозе, то их резервуар может состоять только из одного состояния. Для электронов, согласно принципу Паули, необходимо ввести совокупность состояний, недоступных наблюдению. Недавно обнаруженные Дираком состояния отрицательных энергий могут служить в качестве вышеописанного резервуара для электронов [2].

Известно, что энергия переходов в ядре часто имеет порядок величины m_0c^2 и даже больше (энергии выброшенных α - и β -лучей и γ -излучения). Совершенно аналогично обычным атомным переходам, при которых энергия может превращаться либо в излучение, либо в энергию возбуждения или ионизации, мы должны в ядре также разграничить различные возможности. Тем более, энергия внутриядерных переходов может перевести электрон из отрицательного состояния в положительное и, таким образом, выбросить из атома. Иными словами, мы должны наряду со скачками Росселанда — Оже в поло-

* Über eine Folgerung der Diracschen Theorie der Protonen und Elektronen. ДАН СССР, серия А, № 6, 153, 1930. Соавтор Д. Д. Иваненко.

жительной области учесть также скачки Оже из всего множества состояний отрицательных энергий. Минимальная необходимая энергия должна при этом превосходить $2m_0c^2$. При этих процессах ни в коем случае не будет нарушен закон сохранения электричества. Все явление совершенно аналогично излучению световых квантов атомом, т. е. электрон, так же как фотон (световой квант), не обладает индивидуальностью в ядре до выброса.

Теперь можно спросить, действительно ли наблюдается такое выбрасывание электронов из ядер, при котором спектр скоростей может быть не резким, так как электроны могут быть удалены из любого отрицательного состояния и эти последние образуют вообще непрерывный спектр. Единственным явлением, которое можно отождествить с описанными скачками Оже, является радиоактивный β -распад. Как известно, первичные β -спектры скоростей всегда размазаны [3] и обладают резкой границей со стороны больших скоростей. Мы бы хотели еще раз подчеркнуть, что из-за отсутствия потенциального барьера для β -частиц едва ли представляется возможным описать β -распад обычными средствами примерно по образцу α -распада. При сделанных предположениях мы можем ожидать большую продолжительность жизни при β -частицах больших энергий, так как число уровней, соответствующих энергиям Оже, сильно возрастает с увеличением энергии перехода.

Еще одно априорное замечание. Если бы внутриядерные электроны были бы эквивалентны периферическим, то мы должны были бы учитывать и их при учете перестановок по принципу Паули. Это изменило бы всю спектроскопическую систему термов. Мы таким образом вынуждены рассматривать все ядро как наделенное очень высокой потенциальной стеной. Такой высокий барьер немислим для электронов, и эквивалентность внешних и внутренних электронов становится очень сомнительной.

Фундаментальным возражением против всей концепции является вопрос о положительной частице, по необходимости возникающей с отрицательными электронами. Если эта частица является протоном, то мы стоим перед большими трудностями, связанными с различием масс. Дирак полагает, что его теория преодолевает эти трудности посредством относительного эффекта обмена, который несимметричен в отношении электронов и протонов—дырок. Тогда, можно надеяться, будет также возможна удовлетворительная теория ядерных протонов.

С этим вопросом тесно связано исследование света, излучаемого при уничтожении материи. Если „сопряженный“ протон обладает таким же моментом и импульсом, что и электрон, но с обратным знаком,

тогда свет обязательно должен получить нулевой импульс и нулевой момент вращения, т. е. излучаются два световых кванта. Если же возможен скачок с положительного уровня в любой открытый отрицательный, тогда кажется возможным описывать процесс с помощью только одного светового кванта. Общепринято, что уничтожение материи дает только один квант; если же это не так, тогда известные высказывания Фюрта и особенно толкование Стонера [4] наблюдений космических лучей Милликена содержат ошибку.

В последнее время некоторые авторы указывали на то, что электрон в ядре теряет в некотором отношении свою индивидуальность. Крониг, Гайтлер и Герцберг [5] впервые заключили об этом из наблюдений Разетти полос N_2 . Все наблюдения тонкой структуры могут быть интерпретированы в том смысле, что электрон теряет свой момент, что было недавно предложено в качестве возможного толкования Шюлером и Брюком. Дорфман любезно сообщил нам свои вычисления о парамагнетизме различных элементов, из которых явственно следует, что элементы, которые не обладают магнитным моментом, обусловленным внешними электронами, и которые при этом имеют нечетное число ядерных электронов, вообще не обнаруживают парамагнетизма*.

Хотя два упомянутых выше автора предпочитают другое толкование, едва ли возможно не усмотреть во всех этих фактах общего основания — потери индивидуальности электрона в ядре.

Ленинград, 30 января 1930 года.

Л И Т Е Р А Т У Р А

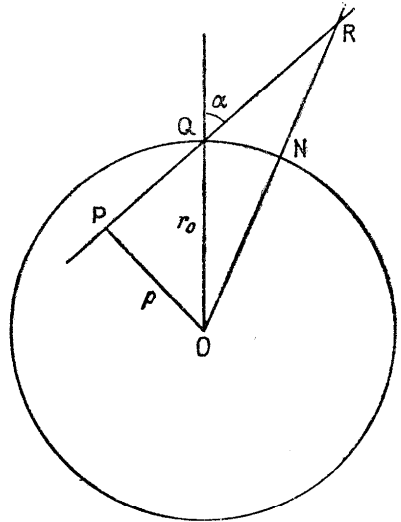
1. P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A, 114, 260, 1927.
2. P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A, 126, 360, 1930.
3. Ellis, Wooster, Proc. Roy. Soc. A, 117, 109, 1927.
4. E. Stoner, Phil. Mag. 1929.
5. Kronig, Heitler, Herzberg, Naturwiss. 1929.

Примечание. Настоящая статья В. А. Амбарцумяна и Д. Д. Иваненко была написана в тот короткий промежуток времени, когда уже появилась теория дырок Дирака, но позитроны еще не были открыты. В тот период дырки ошибочно отождествлялись с протонами. Этим объясняется и название статьи. Нейтроны также не были еще известны. Статья интересна в том отношении, что здесь впервые содержится решительный отказ от присутствия в ядрах электронов, как индивидуальных частиц. Последующее открытие нейтрона позволило Иваненко сделать отсюда прямое заключение о том, что ядра состоят из протонов и нейтронов.

* Мы выражаем глубокую благодарность И. Дорфману за его любезное общение.

К ВОПРОСУ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ОЗОНА В ЗЕМНОЙ АТМОСФЕРЕ*

Вопрос о возможности однозначного вывода закона распределения озона по высоте в земной атмосфере был поставлен Rosseland'ом. Однако им не дано полного решения этого вопроса и даже высказано сомнение в однозначности решения. Мы покажем ниже, что некоторые величины, характеризующие распределение озона (например, высота центра тяжести слоя озона, толщина слоя и др.) могут быть получены однозначно и дадим формулы для их получения. Пусть на поверхности Земли (см. фиг. 1) в точке Q расположен наблюдатель. Пусть $n(r)$ есть число молекул озона в 1 куб. сантиметре на расстоянии r от центра земли. Сосчитаем, чему равно число атомов N внутри бесконечного цилиндра, осью которого служит луч QR и поперечное сечение равно 1 см^2 .



Фиг. 1.

Допустим при этом, что луч QR образует угол α с направлением на зенит. Очевидно, что N будет функцией α или связанной с ней величины $p = OP = r_0 \sin \alpha$, где r_0 есть радиус земли. Мы имеем:

$$N = \int_0^{\infty} n ds,$$

где $s = QR$. Из чертежа видно, что

$$s + PQ = \sqrt{r^2 - p^2}.$$

* Бюлл. КИСО, № 5—6, 29, 1933.

Так как для данного луча PQ и p постоянны

$$ds = \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - p^2}}.$$

Поэтому

$$N(p) = \int_{r_0}^{\infty} \frac{n(r) r dr}{\sqrt{r^2 - p^2}}. \quad (1)$$

Подстановкой

$$t = \left(\frac{r}{r_0}\right)^2; \quad s = \left(\frac{p}{r_0}\right)^2; \quad \frac{N}{r_0} = K$$

это уравнение приводится к виду

$$K(s) = \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{n(t) dt}{\sqrt{t-s}}. \quad (2)$$

Мы получаем интегральное уравнение первого рода с постоянными пределами (а не уравнение типа Abel'я, как это получалось у Rosseland'a). Величина s изменяется в пределах $(0,1)$, между тем как t меняется в пределах $(1, \infty)$. Поэтому, если путем преобразования переменных добиться того, чтобы t и s менялись в одинаковых пределах, симметрия ядра будет нарушена.

Оставляя в стороне вопрос об однозначности решения уравнения (2), мы попытаемся извлечь, по крайней мере, некоторые сведения о функции $n(r)$ из уравнения (1). Введем высоту над поверхностью земли h . Тогда $r = r_0 + h$ и

$$\begin{aligned} \sqrt{r^2 - p^2} &= \sqrt{(r_0 + h)^2 - r_0^2 \sin^2 \alpha} = \sqrt{r_0^2 \cos^2 \alpha + 2hr_0 + h^2} = \\ &= r_0 \cos \alpha \sqrt{1 + \frac{1}{\cos^2 \alpha} \left(2 \frac{h}{r_0} + \frac{h^2}{r_0^2}\right)}. \end{aligned}$$

Так как на высоте выше 100 км плотность озона близка к нулю, то в уравнении (1) интегрирование может быть доведено практически лишь до этой высоты.

Между тем для $\sec^2 \alpha < 30$ при $h < 100$ км выражение

$$\frac{r dr}{\sqrt{1 + \sec^2 \alpha \left(2 \frac{h}{r_0} + \frac{h^2}{r_0^2}\right)}} = \frac{(r_0 + h) dh}{\sqrt{1 + \sec^2 \alpha \left(2 \frac{h}{r_0} + \frac{h^2}{r_0^2}\right)}}$$

может быть разложено в ряд по степеням $\sec^2 \alpha \left(2 \frac{h}{r_0} + \frac{h^2}{r_0^2}\right)$.

Мы имеем

$$\frac{(r_0 + h) dh}{\sqrt{1 + \sec^2 \alpha \left(2 \frac{h}{r_0} + \frac{h^2}{r_0^2} \right)}} = (r_0 + h) \left[1 - \frac{1}{2} \sec^2 \alpha \left(2 \frac{h}{r_0} + \frac{h^2}{r_0^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{3}{8} \sec^4 \alpha \left(2 \frac{h}{r_0} + \frac{h^2}{r_0^2} \right)^2 - \frac{15}{48} \sec^6 \alpha \left(2 \frac{h}{r_0} + \frac{h^2}{r_0^2} \right) + \dots \right] dh.$$

Интегрируем почленно

$$N(\alpha) = \int_0^\infty n(h) \frac{r_0 + h}{r_0} \sec \alpha \left[1 - \frac{1}{2} \sec^2 \alpha \left(2 \frac{h}{r_0} + \frac{h^2}{r_0^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{3}{8} \sec^4 \alpha \left(2 \frac{h}{r_0} + \frac{h^2}{r_0^2} \right) - \frac{15}{48} \sec^6 \alpha \left(2 \frac{h}{r_0} + \frac{h^2}{r_0^2} \right)^3 + \dots \right] dh = \\ = \sec \alpha \int_0^\infty \left(1 + \frac{h}{r_0} \right) n(h) dh - \\ - \frac{1}{2} \sec^3 \alpha \int_0^\infty \left(1 + \frac{h}{r_0} \right) \left(2 \frac{h}{r_0} + \frac{h^2}{r_0^2} \right) n(h) dh + \\ + \frac{3}{8} \sec^5 \alpha \int_0^\infty \left(1 + \frac{h}{r_0} \right) \left(2 \frac{h}{r_0} + \frac{h^2}{r_0^2} \right)^2 n(h) dh - \\ - \frac{15}{48} \sec^7 \alpha \int_0^\infty \left(1 + \frac{h}{r_0} \right) \left(2 \frac{h}{r_0} + \frac{h^2}{r_0^2} \right)^3 n(h) dh + \dots \quad (3)$$

Допустим, с другой стороны, что мы имеем разложение $N(\alpha)$ по степеням $\sec \alpha$

$$N(\alpha) = A \sec \alpha - B \sec^3 \alpha + C \sec^5 \alpha - D \sec^7 \alpha + \dots \quad (4)$$

Величины A, B, C, D, \dots пусть определяются из наблюдаемой кривой $N(\alpha)$. Сравнивая (3) и (4), мы можем найти интегралы, входящие в правую часть (3).

Обозначим теперь:

$$N_0 = \int_0^\infty n(h) dh; \quad a = \int_0^\infty n(h) \frac{h}{r_0} dh; \quad b = \int_0^\infty n(h) \frac{h^2}{r_0^2} dh;$$

$$c = \int_0^{\infty} n(h) \frac{h^3}{r_0^3} dh \dots \quad (5)$$

Сравнивая (3), (4) и (5), найдем

$$\begin{aligned} A &= N_0 + a; \\ B &= a + \frac{3}{2} b + \frac{1}{2} c; \\ C &= \frac{3}{2} b + 3c + \dots; \\ D &= \frac{5}{6} c + \dots; \end{aligned} \quad (6)$$

где многоточием обозначены члены, содержащие

$$\int_0^{\infty} n(h) \left(\frac{h}{r_0}\right)^m dh,$$

в которых $m > 3$.

Решая уравнения (6), начиная с последнего, мы найдем величины N_0 , a , b , c (пренебрегая, конечно, при этом высшими степенями $\frac{h}{r_0}$).

Найденные числа a , b , c имеют довольно простой физический смысл: N_0 есть число молекул озона в вертикальном столбе с основанием в 1 см^2 . Далее из a и N_0 мы можем вычислить точную высоту центра тяжести этого столба озона h_0 . В самом деле:

$$h_0 = \frac{\int n(h) h dh}{\int n(h) dh} = \frac{ar_0}{N_0}.$$

Далее мы можем вычислить среднее квадратичное отклонение от центра тяжести, каковая величина будет характеризовать „толщину“ слоя озона:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{\int n(h) (h - h_0)^2 dh}{\int n(h) dh} = \frac{br_0^2 - 2h_0 ar_0 + h_0^2 N_0}{N_0} = \\ &= \frac{b}{N_0} r_0^2 - \frac{2a^2 r_0^2}{N_0^2} + \frac{a^2 r_0^2}{N_0^2} = \frac{b}{N_0} r_0^2 - \frac{a^2}{N_0^2} r_0^2, \end{aligned}$$

т. е. „толщина“ слоя будет равна

$$\sigma = r_0 \sqrt{\frac{b}{N_0} - \frac{a^2}{N_0^2}}.$$

Точно так же можно получить величину среднего кубического отклонения и т. д.

Таким образом, зная из наблюдений $N(\alpha)$, можно во всяком случае получить некоторые характеристики закона распределения озона с высотой.

Нужно, однако, отметить, что само определение чисел $N(\alpha)$ представляет собой чрезвычайно трудную задачу. В самом деле: если мы определяем их из наблюдений спектра Солнца в течение суток, то откуда мы можем быть уверены в постоянстве распределения озона в течение суток? Однако обсуждение этого вопроса не является предметом настоящей статьи.

О ДИССИПАЦИИ АТМОСФЕРЫ*

Известно, что молекулы, находящиеся в самых верхних слоях нашей атмосферы, обладающие скоростями, превосходящими некоторую критическую скорость, могут покинуть землю, если на пути не произойдет столкновения с другими частицами. Очевидно, мы можем рассчитать, какое количество частиц покидает таким образом пределы земной атмосферы.

Для этого нужно лишь вычислить, какое количество частиц с такими большими скоростями производится в каждом слое атмосферы и, кроме того, вычислить, какая доля из произведенных таким образом частиц с большими скоростями может покинуть атмосферу без столкновения. Таким образом, мы видим, что диссипация зависит от того механизма, с помощью которого создаются частицы с большой скоростью.

Ряд авторов работали над этой темой и предполагали совершенно естественно, что основная причина образования частиц с большими скоростями — столкновение атомов, которое всегда приводит к образованию частиц с большими скоростями. Но если температура газа низка, то число производимых в единицу времени частиц с большой скоростью будет очень мало. Это число зависит также от массы атомов или молекул. Если, согласно теории Джинса и др., произвести соответствующий расчет, то оказывается, что время, потребное для того, чтобы произошла значительная диссипация, значительное разрушение нашей атмосферы, если бы она состояла из чистого водорода, превосходит в тысячу раз все мыслимые оценки возраста земли. Я уже не говорю о других газах, где диссипация будет идти бесконечно медленнее. Было отмечено, что та температура, которую мы имеем, не приводит к сколько-нибудь значительной диссипации атмосферы. Однако

* Труды Всесоюзной конференции по изучению стратосферы, Л.—М., 1935, 457. (Доклад опубликован на основе стенографической записи. *Ред.*).

оценивая скорость диссипации атмосферы, надо иметь в виду тот слой, о котором говорил в конце своего доклада предыдущий докладчик*. Надо иметь в виду, что во внешних слоях земной атмосферы, находящейся вне непосредственного действия непоглощенного света, происходят процессы фото-диссоциации, которые приводят к тому, что частицы получают большие скорости. Эти частицы с большой скоростью будут иметь такое распределение, что в среднем соответствует, примерно, той температуре, которой обладает Солнце, именно, 6 тыс. градусов. Поэтому, если только этот слой осуществляется на такой высоте, где плотность еще достаточно велика, то несомненно влияние этих слоев на скорость диссипации нашей атмосферы будет велико. Если же слой очень высок, в этом случае влияние на диссипацию будет очень мало.

Диссипация атмосферы, главным образом, происходит из того слоя, где плотность настолько мала, что можно считать, что если из этого слоя пустить молекулу вверх, то она благодаря небольшому количеству частиц не испытает никакого столкновения, или число столкновений будет порядка не больше единицы. Можно показать, что главное участие в диссипации принимает этот слой. Все зависит от того, достигает ли температура в этом слое нескольких тысяч градусов, или же там еще имеет место температура стратосферы. Оказывается, что для того, чтобы ответить на этот вопрос, нужно сперва решить некоторые вопросы фотохимии. Все зависит, конечно, от того, поглощается ли в этих слоях та энергия, которая будет создавать эту большую скорость. Каким образом создаются эти большие скорости? Приведем такой пример: допустим, мы имеем водородные или азотные молекулы в верхних слоях атмосферы, где происходит поглощение соответствующих коротковолновых участков. Если водородная молекула поглощает некоторый квант света, эта молекула переходит в возбужденное состояние, в котором возбужден прежде всего электрон и возбуждено некоторое колебательное состояние. Затем эта молекула испускает некоторый квант, но может вернуться не в прежнее, первое колебательное состояние, т. е. самое низкое колебательное состояние, а в более высокое колебательное состояние. И тогда в результате столкновения эта колебательная энергия, которая осталась и которая не может быть излучена, поскольку соответствующий переход молекулы запрещен, эта энергия переходит в кинетическую энергию поступательного движения.

Этот механизм является основной причиной, благодаря которой в самых верхних слоях атмосферы будет осуществляться высокая тем-

* Доклад Н. А. Козырева на той же конференции. *Ред.*

пература. Оказывается, что действительно тот слой, в котором главным образом будет происходить диссипация, должен находиться при высокой температуре. Происходит это потому, что поглощение до этого слоя будет ничтожно не потому, что над этим слоем мало частиц, а потому, что в более высоких слоях молекулы будут диссоциированы. Вследствие того, что вышележащий слой прозрачен, он пропускает те лучи, которые возбуждают соответствующую молекулу, и поэтому в этом слое, где главным образом может происходить диссипация, будет царить высокая температура.

Конечно, здесь все зависит от того типа молекулы, который мы взяли. Если бы у нас была молекула, не состоящая из одинаковых атомов, а полярная, то дело было бы сложнее, потому что тогда диссоциация в верхних слоях была бы ничтожной. Благодаря тому, что в верхних слоях царит, таким образом, высокая температура, оказывается возможным сильно уменьшить цифру периода диссипации и показать, что она уже не может быть такой несравнимой с теми цифрами, которые мы привыкли иметь, оценивая возраст Земли, т. е. миллиарды лет.

СО Д Е Р Ж А Н И Е

	Стр.
Предисловие редактора	5
Физика газовых туманностей и звездных оболочек	
О температурах ядер планетарных туманностей	11
О лучистом равновесии планетарной туманности	17
Температуры звезд типа Вольф-Райе	48
Возбуждение метастабильных состояний в газовых туманностях	49
Поверхностные яркости монохроматических изображений некоторых газовых туманностей	59
Об интенсивностях линий $\lambda 4686$ и $H\beta$ у звезд Вольф-Райе	67
О массах газовых оболочек, выбрасываемых новыми звездами	72
Об ионизации в небулярной оболочке, окружающей звезду	78
О лучевом равновесии водородных оболочек, окружающих звезды	95
Звездная астрономия	
О средней продолжительности жизни короткопериодических цефеид	105
О выводе функции распределения пространственных скоростей звезд из наблюдаемых лучевых скоростей	107
О распределении пространственных скоростей звезд типов В и F	116
О слабых белых звездах в низких галактических широтах	131
Двойные звезды и космогоническая шкала времени	140
К статистике двойных звезд	142
К вопросу о динамике открытых звездных скоплений	158
О гравитационной потенциальной энергии открытых скоплений	163
Теория рассеяния света	
О соотношении между решением и резольвентой интегрального уравнения лучистого равновесия	169
О диффузии фотонов через рассеивающую среду в связи с применением к некоторым астрофизическим вопросам	175
Рассеяние и поглощение света в планетных атмосферах	181
О рассеянии света атмосферами планет	206
Новый способ расчета рассеяния света в мутной среде	223
К вопросу о диффузном отражении света мутной средой	232
К задаче о диффузном отражении света	238
Диффузия света через рассеивающую среду большой оптической толщины	256
Об одномерном случае задачи о рассеивающей и поглощающей среде конечной оптической толщины	263

Точечный источник света в мутной среде	269
О диффузном отражении и пропускании света анизотропной одномерной рассеивающей средой конечной оптической толщины	278
О числе рассеяний при диффузии фотонов в мутной среде	282
Мутная среда с равномерным распределением источников	286
Теория межзвездного поглощения света	
Проблема диффузных туманностей и космическое поглощение	291
Флуктуации в числе внегалактических туманностей и галактическое поглощение	309
К теории флуктуаций яркости в Млечном Пути	316
К вопросу о флуктуациях яркости Млечного Пути	322
К вопросу о характере связи диффузных туманностей с освещающими их звездами	327
О поверхностных яркостях в Галактике	331
К вопросу об относительном распределении светлой и поглощающей материи в Галактике	347
Подсчеты внегалактических туманностей и галактическое поглощение	351
О клочковатой структуре межзвездного поглощающего слоя	356
К теории флуктуаций в видимом распределении звезд на небе	363
Разное	
Об одном вопросе теории собственных значений	411
Об одном следствии теории Дирака протонов и электронов	418
К вопросу о распределении озона в земной атмосфере	421
О диссипации атмосферы	426

ВИКТОР АМАЗАСПОВИЧ АМБАРЦУМЯН

НАУЧНЫЕ ТРУДЫ

Том первый

Редактор Л. В. МИРЗОЯН
Худ. оформление К. Т. ТИРАТУРЯНА
Техн. редактор М. А. КАПЛЯН
Корректор В. Б. АНДРЕАСЯН

ВФ 02397, РИСО 589, изд. 1769, заказ 502, тираж 2500

Сдано в производство 31/XII 1959 г. Подписано к печати 30/VI 1960 г.
Бумага 70×108¹/₁₆, печ. л. 27, изд. л. 26,17 Цена с переплетом 20 р.

Типография Издательства Академии наук Армянской ССР
Ереван, ул. Абовяна, 124.

ЗАМЕЧЕННЫЕ СУЩЕСТВЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
51	В формуле (12)	$\frac{1}{13^2}$	$\frac{1}{13}$
84	12-я снизу	$h\nu_{13}$	$h\nu_{23}$
86	в формуле (21)	$\frac{\nu_{12}\Delta\nu_{12}}{\nu_{13}\Delta\nu_{13}}$	$\frac{\nu_{12}\Delta\nu_{12}}{\nu_{12}\Delta\nu_{13}}$
171	1-я снизу в формуле в числителе третьей и четвертой дробей	e	e^s
250	6-я сверху и в формуле (31)	ξ^1	ξ_1^1
282	4-я снизу	$\tau = \frac{\sigma}{\tau + z}$	$\tau = \frac{\sigma}{\tau + z}$
319	в формуле (10)	$g'(u)$	$g(u) + g'(u)$
345	" (26)	$10^{-0.4c}$	$10^{-0.4ck}$
369	в формуле (3.11)	$e^{-\frac{y_0}{\sin b} (1 - q^2)}$	$e^{-\frac{y_0}{\sin b} (1 - q^2)}$
375	8-я снизу	$1 - F(\tau)$	$1 - F(\tau)$
379	в формуле (5.12)	$\frac{1 - q}{1 + q}$	$\frac{1 - q}{1 + q}$
388	7-я снизу	$\frac{2\Gamma(2s + 2)}{[\Gamma(s + 1)]^2}$	$\frac{2\Gamma(2s + 2)}{[\Gamma(s + 1)]^2}$
407	в формуле (13.6)	$\frac{i}{i}$	$\frac{i^2}{i^2}$